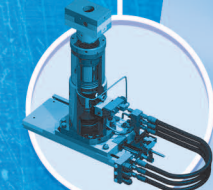
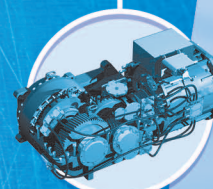
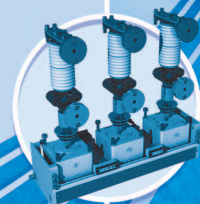
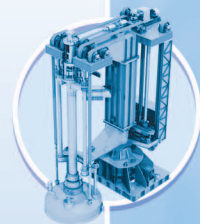
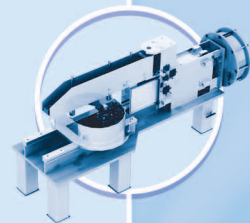
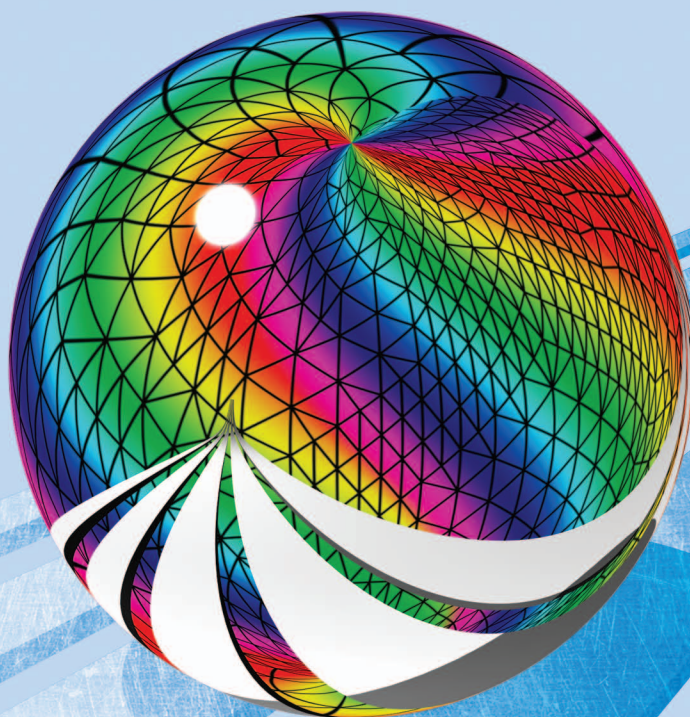


**t-flex**

CAD/CAM/CAE/CAPP/PDM

# **T-FLEX Анализ**

**Руководство пользователя**



**Топ Системы**

# ***T-FLEX АНАЛИЗ***

---

**ПОСОБИЕ ПО РАБОТЕ С СИСТЕМОЙ**

---

**©Авторское право 2013 ЗАО «Топ Системы»**

Все авторские права защищены. Запрещено воспроизведение в любой форме любой части настоящего документа без разрешения от ЗАО «Топ Системы».

ЗАО «Топ Системы» не несет ответственности за ошибки, которые могут быть в этой книге. Также не предполагается никаких обязательств за повреждения, обусловленные использованием содержащейся здесь информации.

Содержание настоящего документа может быть изменено без предварительного уведомления.

Торговые марки T-FLEX Parametric CAD, T-FLEX Parametric Pro, T-FLEX CAD, T-FLEX CAD 3D, T-FLEX Анализ являются собственностью ЗАО «Топ Системы».

Все названия программных и аппаратных средств и названия компаний, упомянутые в настоящей публикации, являются торговыми марками или зарегистрированными торговыми марками соответствующих владельцев.

---

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение .....</b>	<b>5</b>
О математическом аппарате T-FLEX Анализа .....	6
Технические требования .....	10
Требования к компьютеру .....	10
Рекомендуемые параметры вычислительной техники для эффективной (профессиональной) работы с T-FLEX Анализом .....	10
Установка системы T-FLEX Анализ .....	10
Структурная организация приложения T-FLEX Анализ .....	11
Этапы анализа конструкций .....	11
Быстрое начало .....	12
Шаг 1. Подготовка объёмной твердотельной модели изделия .....	12
Шаг 2. Создание «Задачи» .....	12
Шаг 3. Назначение материала .....	14
Шаг 4.1 Наложение граничных условий. Задание закреплений .....	16
Шаг 4.2 Наложение граничных условий. Задание нагружений .....	18
Шаг 5. Выполнение расчёта .....	19
Шаг 6. Анализ результатов расчёта .....	20
<b>Подготовка конечно-элементной модели для Анализа (Препроцессор) .....</b>	<b>23</b>
Виды конечно-элементных моделей .....	23
Назначение и роль сеток .....	26
Виды и роль граничных условий .....	28
Управление «Задачами», команды управления задачами .....	30
Общие свойства задач .....	32
Задание материала .....	33
Задание свойств анизотропных материалов .....	36
Построение сетки .....	42
Параметры сетки .....	43
Задание ограничений .....	48
Полное закрепление .....	48
Частичное закрепление .....	49
Контакт .....	51
Упругое основание .....	53
Задание нагрузок .....	55
Механические нагрузки .....	55
Сила .....	55
Давление .....	61
Вращение .....	65
Ускорение .....	67
Цилиндрическая нагрузка .....	68
Крутящий момент .....	69
Осциллятор .....	72
Дополнительная масса .....	74
Тепловые нагрузки .....	75
Температура .....	75
Тепловой поток .....	76



Тепловая мощность .....	77
Конвективный теплообмен .....	78
Излучение .....	79
Тепловой контакт (Термическое сопротивление) .....	80
Сводная таблица нагрузок .....	82
Редактирование нагрузок и закреплений .....	83
Настройки и сервисные команды .....	83
Работа с 3D окном при подготовке элементов задач .....	85
Особенности работы с параметрической моделью .....	86
Экспорт .....	86
<b>Обработка результатов (Постпроцессор).....</b>	<b>87</b>
Общие принципы работы с результатами .....	87
Настройки и сервисные команды окна результатов расчёта .....	89
Настройка окна результатов расчёта .....	89
Настройка цветовой шкалы .....	92
Использование датчиков для анализа результатов .....	95
Построение сечений .....	97
Генерация отчётов .....	99
Шаблоны отчётов .....	100
Перечень тэгов для формирования отчётов .....	101
Тэг .....	101
Значение тэга .....	101
Пример интерпретации результата .....	102
<b>Статический анализ.....</b>	<b>105</b>
Особенности этапов статического анализа .....	106
Алгоритм оценки статической прочности по результатам моделирования .....	113
Настройки процессора линейной и нелинейной статики .....	114
Задача оптимизации .....	121
Задача об оптимизации толщины балки .....	122
Приложение (справочные материалы) .....	125
Характеристики конструкционных материалов .....	125
Объёмное напряжённо-деформированное состояние в точке .....	128
Оценка статической прочности конструкций. Теории прочности .....	129
<b>Анализ устойчивости .....</b>	<b>131</b>
Особенности этапов анализа на устойчивость .....	133
Алгоритм оценки устойчивости по результатам моделирования .....	135
Настройки Процессора анализа устойчивости .....	136
<b>Частотный анализ .....</b>	<b>137</b>
Особенности этапов частотного анализа .....	139
Настройки Процессора частотного анализа .....	140
<b>Тепловой анализ .....</b>	<b>142</b>
Особенности этапов теплового анализа .....	143
Настройки Процессора теплового анализа .....	145
Примеры тепловых расчётов .....	147
Тепловой расчёт радиатора охлаждения. Установившийся режим .....	147
Расчёт времени нагревания радиатора охлаждения. Нестационарный режим .....	149
Расчёт времени остывания радиатора охлаждения. Нестационарный режим .....	150
<b>Верификационные примеры .....</b>	<b>151</b>
Примеры расчётов задач статики .....	151

Изгиб консольно-зашемлённой балки под действием сосредоточенной нагрузки .....	151
Статический расчет круглой пластины, зашечленной по контуру .....	153
Расчет сферического сосуда давления .....	155
Квадратная пластина под силой в центре (пластинчатый КЭ).....	157
Цилиндрический резервуар со стенками постоянной толщины .....	158
Кручение бруса с круглым поперечным сечением .....	162
Стержень под действием собственного веса .....	164
Расчёт вращающегося сплошного диска постоянной толщины .....	165
Свободно опертая прямоугольная пластинка под синусоидальной нагрузкой .....	167
Полубесконечная балка на упругом основании .....	170
Большая деформация круглой пластины .....	174
Зашемленная квадратная пластина под распределенной нагрузкой .....	177
Изгиб балки под действием 3 сил .....	179
Сгибание Т-образной балки .....	181
Кручение балки с квадратным поперечным сечением .....	183
Кручение вала двумя вращающимися моментами .....	186
Прогиб свободно опертой балки под равномерно распределенной нагрузкой .....	189
Прогиб балки с грузом.....	191
Растяжение балки под действием 2 сил .....	194
Напряжения и деформации ортотропной пластины при двухосном растяжении .....	196
Температурные напряжения биметаллического элемента .....	203
Температурная деформация 3-D бруска.....	205
Примеры расчётов задач с контактами .....	206
Контакт плоской пружины .....	206
Контакт оси и проушины.....	208
Примеры расчётов задач устойчивости .....	211
Расчет устойчивости сжатого прямого стержня.....	211
Устойчивость квадратной пластины (+пластинчатый КЭ) .....	212
Устойчивость прямоугольной пластины (+пластинчатый КЭ).....	214
Примеры задач частотного анализа.....	216
Определение собственных частот колебаний балки .....	216
Определение первой собственной частоты колебаний круглой пластинки.....	217
Свободные колебания сферического купола (+пластинчатый КЭ) .....	218
Изгибные колебания кругового кольца.....	221
Осевые и поперечные частоты колебаний балки с весом.....	224
Первая собственная частота консольной балки под действием продольной растягивающей силы .....	227
Первая собственная частота системы на упругом основании .....	229
Примеры задач анализа вынужденных колебаний .....	231
Вынужденные колебания грузика на пружине (силовое возбуждение).....	231
Вынужденные колебания грузика на пружине (кинематическое возбуждение).....	237
Примеры задач теплового анализа .....	242
Установившаяся температура .....	242
Поток тепла в шаре .....	244
Теплопроводность цилиндрической стенки .....	246
Диск, нагреваемый по оси распределённой мощностью, с постоянной температурой по наружной цилиндрической поверхности.....	248
Распределённая мощность, приложенная к цилиндрической поверхности внутри диска .....	252
Мощность точечного источника внутри шара.....	257
Температурное поле тепловой системы радиатора и чипа.....	264
Ортотропная графитовая пластина при установившемся температурном режиме.....	270

Температурное поле системы двух цилиндрических вложенных тел с тепловым сопротивлением поверхности касания .....	277
Поток и конвекция для изотропной пластины .....	285
Тепловой поток в изотропном диске .....	289
Излучение пластины во внешнюю среду .....	295
Излучение на поверхности полого шара .....	299
Тепловое сопротивление плоской пластинки .....	303
Тепловое сопротивление сферы .....	307
Нестационарное тепловое поле в изотропном шаре .....	312
Нестационарное тепловое поле в изотропном шаре с теплоотдачей на поверхности .....	317
Нестационарное тепловое поле в изотропном шаре с теплообменом на поверхности .....	323
Нестационарное тепловое поле в изотропном цилиндре .....	328
Нестационарное тепловое поле в ортотропной пластине .....	334
Литература .....	341

---

## ВВЕДЕНИЕ

---

T-FLEX Анализ – это интегрированная с T-FLEX CAD среда конечно-элементных расчётов. Используя T-FLEX Анализ, пользователь системы T-FLEX CAD имеет возможность осуществлять математическое моделирование распространённых физических явлений и решать важные практические задачи, возникающие в повседневной практике проектирования. Все расчёты ведутся с применением метода конечных элементов (МКЭ). При этом между трёхмерной моделью изделия и расчётной конечно-элементной моделью поддерживается ассоциативная связь. Параметрические изменения исходной твердотельной модели автоматически переносятся на сеточную конечно-элементную модель.

- **Статический анализ** позволяет осуществлять расчёт напряжённо-деформированного состояния конструкций под действием приложенных к системе постоянных во времени сил. Также можно учесть напряжения, возникающие по причине температурного расширения/сжатия материала или деформации конструкции на величину известных перемещений. С помощью модуля «Статический анализ» пользователь может оценить прочность разработанной им конструкции по допускаемым напряжениям, определить наиболее уязвимые места конструкции и внести необходимые изменения, оптимизировать изделие.
- **Частотный анализ** позволяет осуществлять расчёт собственных (резонансных) частот конструкции и соответствующих форм колебаний. По итогам расчета осуществляется проверка наличия резонансных частот в рабочем частотном диапазоне изделия. Разработчик может повысить надёжность и работоспособность изделия, оптимизируя конструкцию таким образом, чтобы исключить возникновение резонансов.
- **Анализ устойчивости** важен при проектировании конструкций, эксплуатация которых предполагает продолжительное воздействие различных по интенсивности нагрузок. С помощью данного модуля пользователь может оценить запас прочности по так называемой «критической нагрузке». Под действием критической нагрузки в сжатых зонах конструкции могут скачкообразно возникнуть значительные неупругие деформации, зачастую приводящие к её разрушению или серьёзному повреждению.
- **Тепловой анализ** – модуль обеспечивает возможность оценки температурного поведения изделия под действием источников тепла и излучения. Тепловой анализ может использоваться самостоятельно для расчёта температурных или тепловых полей по объёму конструкции, а также совместно со статическим анализом для оценки возникающих в изделии температурных деформаций.

---

### О математическом аппарате T-FLEX Анализа

---

В процессе машиностроительного проектирования часто возникает необходимость оценки наиболее значимых физико-механических свойств деталей и узлов, или изделия в целом. Например, при проектировании необходимо оценить прочность деталей при заданных нагружениях или максимальные деформации корпуса изделия. Длительное время единственным средством оценки физико-механических свойств изделий были оценочные расчёты с использованием приближенных аналитических или полуэмпирических методик, приводимых в отраслевых справочных руководствах.

Точность подобных методик применительно к реальным объектам проектирования обычно не высока. Поэтому в конструкцию изделия закладываются значительные «коэффициенты запаса» (например, по прочности), снижающие риск принятия ошибочного проектного решения.

Появление компьютерной техники и развитие вычислительной математики привели к серьезным изменениям традиционных подходов к инженерным расчётам. Начиная с середины 60-х годов 20 века лидирующим методом численного решения самых разных физических задач становится **метод конечных элементов (МКЭ)**. Особенности МКЭ, обеспечившими ему ведущее положение в прикладной вычислительной математике, стали присущие методу:

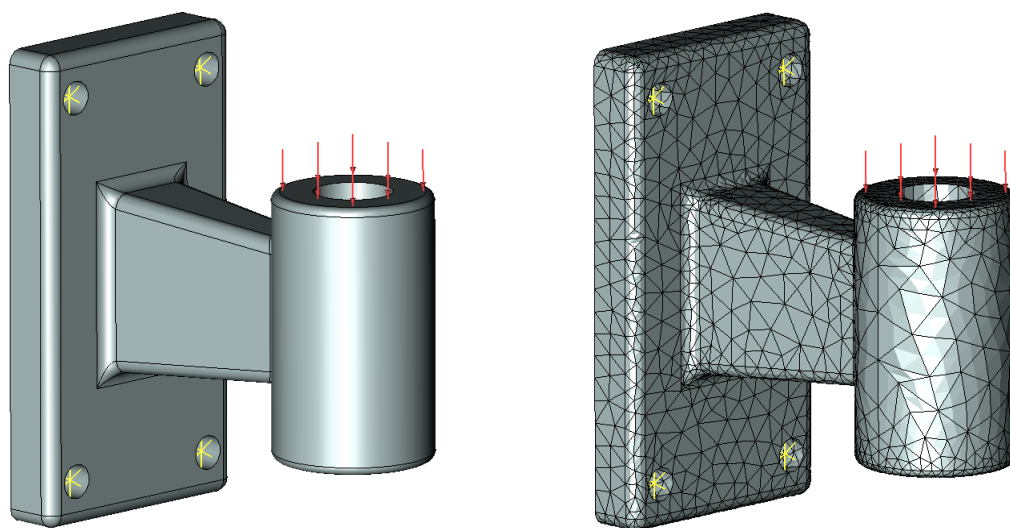
- универсальность – пригоден для решения самых различных задач математической физики (механика деформируемого тела, теплопроводность, задачи электродинамики);
- хорошая алгоритмируемость – возможность разработки программных комплексов, охватывающих широкий круг прикладных задач;
- хорошая численная устойчивость МКЭ алгоритмов.

Развитие персональных компьютеров и начало их широкого использования в проектных целях привели к ускоренному развитию и появлению прикладных систем конечно-элементного анализа, которые не требуют от пользователя глубоких знаний теории МКЭ, исключают трудоёмкие операции ручной подготовки исходных данных и предоставляют прекрасные возможности по обработке результатов математического моделирования.

T-FLEX Анализ относится к современным системам конечно-элементного анализа, ориентированным на широкий круг пользователей, которым по роду их деятельности приходится сталкиваться с необходимостью оценки поведения изделий в условиях различных физических воздействий. T-FLEX Анализ ориентирован на неспециалиста в области конечно-элементного анализа и не требует от пользователя специфических знаний в области математического моделирования для эффективного использования системы. Тем не менее, корректность получаемых результатов математического моделирования и их правильная оценка в значительной степени определяются квалифицированным подходом пользователя к формулировке решаемых с помощью T-FLEX Анализа физических задач.

Суть метода конечных элементов заключается в замене исходной пространственной конструкции сложной формы на дискретную математическую модель, должным образом отражающую физическую сущность и свойства исходного изделия. Важнейшим элементом этой модели является **конечно-элементная дискретизация** изделия - построение совокупности элементарных объёмов заданной формы (т.н. **конечных элементов, КЭ**) объединённых в единую систему (т.н. **конечно-элементную сетку**).

T-FLEX Анализ ориентирован на решение физических задач в объёмной постановке. Для математической аппроксимации изделия используется её эквивалентная замена сеткой из тетраэдральных элементов. Тетраэдральный конечный элемент удобен для автоматической генерации расчётной сетки, так как с помощью тетраэдра можно с очень большой точностью аппроксимировать сколь угодно сложную форму изделия.



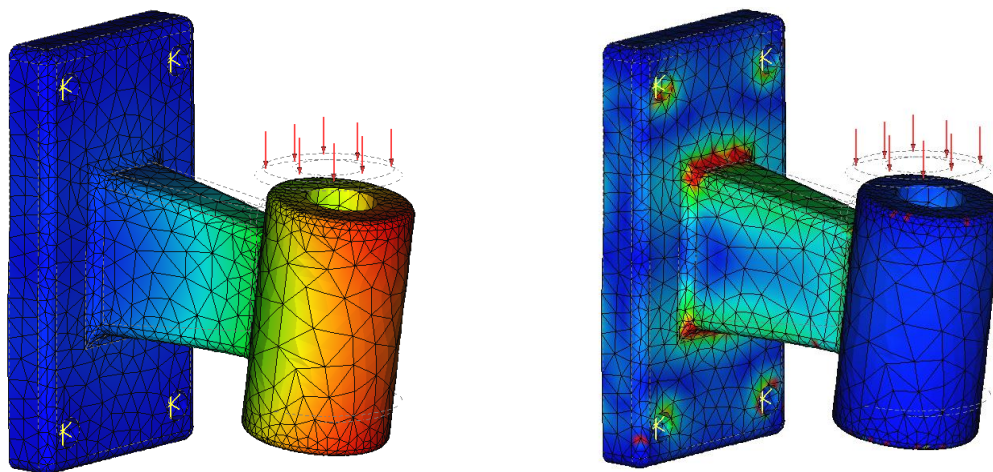
**Исходная конструкция и её конечно-элементная дискретизация**

Конструкция, представляющая собой распределенную систему сложной геометрической формы, представляется в виде совокупности конечных элементов. Конечные элементы, аппроксимирующие исходную конструкцию, считаются связанными между собой в граничных точках - узлах, в каждом из которых вводится по три поступательных степени свободы (для задач механики). Действующие на конструкцию внешние нагрузки приводятся к эквивалентным силам, прикладываемым в узлах конечных элементов. Ограничения на перемещение конструкции (закрепления) также переносятся на конечные элементы, которыми моделируется исходный объект. Поскольку каждый КЭ имеет заранее определенную форму и известны его геометрические характеристики и характеристики материала, для каждого КЭ, которыми моделируется конструкция, можно записать систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), определяющих смещение узлов КЭ под действием приложенных в эти узлы сил.

Записывая систему уравнений для каждого конечного элемента, аппроксимирующего исходную физическую систему, мы рассматриваем их совместно и получаем систему уравнений для полной конструкции. Порядок этой системы уравнений равен произведению количества подвижных узлов конструкции на число введенных степеней свободы в одном узле. В T-FLEX Анализе обычно это соответствует десяткам или сотням тысяч алгебраических уравнений.

Формируя систему уравнений для всей конструкции и решая её, получаем значения искомой физической величины (например, перемещений) в узлах конечно-элементной сетки, а также дополнительные физические величины, например, напряжения. Эти значения будут приближенными (с точки зрения теоретически возможного «точного» решения соответствующего дифференциального уравнения математической физики), но погрешность решения может быть очень небольшой – доли процента на тестовых задачах, имеющих «точное» аналитическое решение. Погрешность получаемого в результате конечно-элементной аппроксимации решения обычно гладко уменьшается с увеличением степени дискретизации моделируемой системы. Другими словами, чем большее количество КЭ участвует в дискретизации (или чем меньше относительные размеры КЭ), тем точнее получаемое решение. Естественно, что более плотное КЭ разбиение требует более значительных вычислительных затрат.





Результаты конечно-элементного моделирования (перемещения и напряжения)

Описанный алгоритм конечно-элементного моделирования применим для решения разных задач, с которыми может столкнуться современный инженер – теплопроводности, электродинамики и т.п. Благодаря перечисленным выше достоинствам МКЭ стал лидирующим методом компьютерного моделирования физических задач и, фактически, ассоциируется с целой отраслью современной индустрии программного обеспечения, известной под аббревиатурой CAE (Computer Aided Engineering).

## Технические требования

---

### Требования к компьютеру

Математическое моделирование физических явлений относится к ресурсоёмким задачам и требует серьёзных вычислительных затрат. Поэтому, для эффективного использования системы конечно-элементного моделирования рекомендуется использовать наиболее производительную вычислительную технику, доступную пользователю. Кроме этого повышения размерности решаемых задач можно достигнуть за счет использования 64-х разрядных операционных систем.

Пользователю доступны два варианта T-FLEX Анализа с точки зрения разрядности используемой операционной системы Windows:

- 1) T-FLEX Анализ для Windows 32-bit («обычная» Windows, например, для компьютеров Pentium III или IV). Особенностью 32-х разрядных операционных систем является наличие «физического» предела на максимальный объем адресуемой информации (около 2 Гбайт), что ограничивает возможности по расчёту систем с большим количеством конечных элементов.
- 2) T-FLEX Анализ для Windows 64-bit (Windows XP 64-bit, Windows Vista 64-bit). Данная система работает на процессорах с поддержкой инструкций 64-bit (например, Intel Pentium D, Intel Core2Duo, AMD 64 и др.). Операционные системы с разрядностью 64-bit позволяют адресовать значительно большие объёмы информации и позволяют решать задачи большой размерности.

## Рекомендуемые параметры вычислительной техники для эффективной (профессиональной) работы с T-FLEX Анализом

Процессор	с поддержкой 64-битных инструкций (Intel Core2Duo, AMD 64 и др.)
Объём дискового пространства (для хранения результатов расчетов)	80 Гбайт и выше
Оперативная память	8 Гбайт (и больше)
Операционная система	Windows 64-bit (Windows XP x64, Windows Vista x64)
Программное обеспечение	T-FLEX CAD 3D x64, T-FLEX Анализ x64

## Установка системы T-FLEX Анализ

Для работы с приложением T-FLEX Анализ требуется наличие установленной системы геометрического моделирования T-FLEX CAD. Поэтому, перед установкой системы T-FLEX Анализ, сначала выполните установку T-FLEX CAD.

Система T-FLEX Анализ поставляется с защитой от нелегального использования. Для работы системы необходимо подключить аппаратный ключ к параллельному (LPT) или USB порту компьютера (в зависимости от типа используемого ключа). Обычно один ключ, поставляемый с программой Анализа может одновременно открывать доступ для работы с несколькими разными программами, например, с T-FLEX CAD и Анализом.

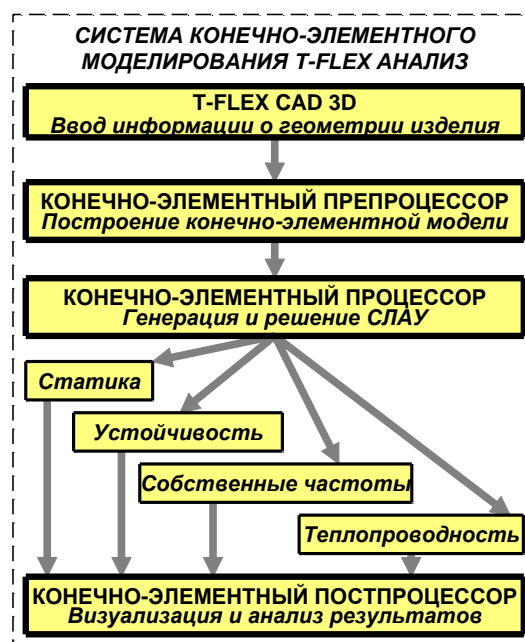
**ВНИМАНИЕ!** Аппаратный ключ необходимо устанавливать и снимать только при выключенном компьютере и периферийном устройстве, если оно подсоединено к параллельному порту. Драйвер аппаратного ключа устанавливается автоматически при установке T-FLEX CAD.

## Структурная организация приложения T-FLEX Анализ

Структурно T-FLEX Анализ организован по модульному принципу, что позволяет пользователю гибко подойти к комплектации рабочего места расчётчика. Стандартная поставка системы включает следующие модули:

- **препроцессор** – модуль подготовки конечно-элементной модели;
- специализированный **расчётный модуль** - в зависимости от решаемых задач, пользователь может выбрать один или несколько из четырёх расчётных модулей (статический анализ, частотный анализ, анализ устойчивости, теплопроводность);
- **постпроцессор** – модуль визуализации и анализа результатов.

Отметим также, что для использования T-FLEX Анализа необходим T-FLEX CAD, который используется в качестве среды-оболочки для системы конечно-элементного моделирования.



## Этапы анализа конструкций

Любой вид анализа осуществляется в несколько этапов. Перечислим необходимые для выполнения анализа шаги. Для осуществления расчётов необходимо:

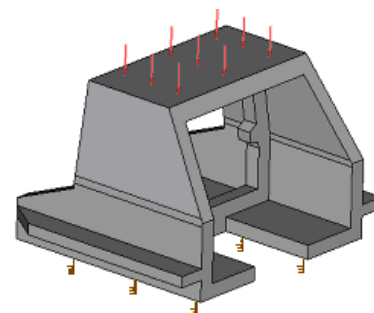
- 1) построить трёхмерную модель изделия;
- 2) создать «Задачу». Задача создается для одного или нескольких соприкасающихся твёрдых тел («клеевое» соединение);
- 3) определить материал модели;
- 4) сгенерировать конечно-элементную сетку;
- 5) наложить граничные условия, определяющие сущность физического явления, подлежащего анализу;
- 6) выполнить расчёт;
- 7) проанализировать результаты.



Перечисленные этапы справедливы для всех типов анализа, реализованных в системе «T-FLEX Анализ». Отличие между этапами моделирования для разных видов анализа состоит только в типах накладываемых граничных условий, которые зависят от вида задачи (расчёта). Например, в статическом анализе и устойчивости роль граничных условий выполняют приложенные к изделию силовые нагрузки и закрепления, в частотном – только закрепления, а в тепловом анализе – температурные и тепловые нагрузки.

## Быстрое начало

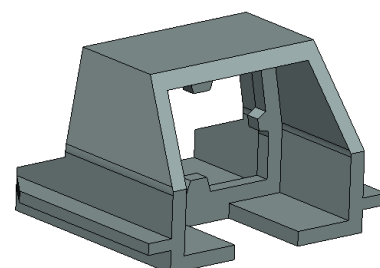
Рассмотрим общий алгоритм использования системы T-FLEX Анализ на примере статического прочностного расчёта. Пусть необходимо осуществить анализ напряжённого состояния конструкции «Корпус», на одну из граней которого приложена распределенная нагрузка, а опорная нижняя поверхность закреплена неподвижно.



### Шаг 1. Подготовка объёмной твердотельной модели изделия

Для выполнения анализа необходимо иметь трёхмерную твердотельную модель изделия. Модель может быть построена пользователем в среде трёхмерного моделирования T-FLEX CAD. Это может быть «рабочая» модель, содержащая проекции и оформленные рабочие чертежи, участвующая в составе сборки, или используемая для расчёта траекторий ЧПУ обработки.

Используя команду T-FLEX CAD **«Файл|Импортировать»**, для анализа можно загрузить в систему модель, созданную в другой системе объёмного моделирования.



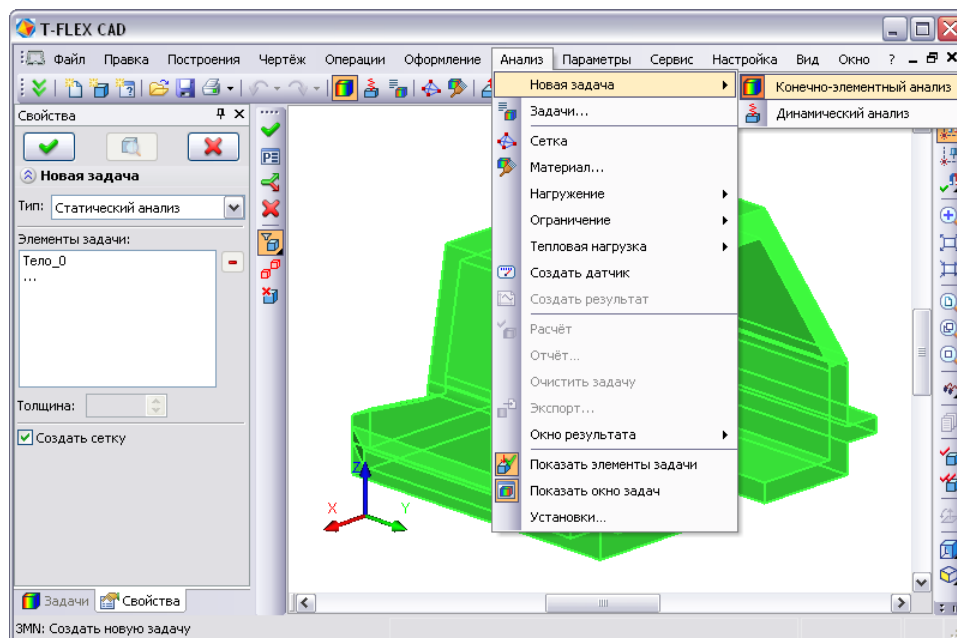
Исходная конструкция

Для целей расчёта бывает полезно заранее получить специально оптимизированный вариант модели (оптимизированную, параметрически зависимую копию оригинала). Например, можно из исходной модели удалить несущественные в расчёте мелкие части (к примеру, не играющие роли маленькие отверстия). В этом случае расчёт будет выполняться быстрее, легче будет получить конечно-элементную сетку. Для корректного приложения нагрузок иногда требуется на участки больших граней «врезать» специальные грани-площадки.

### Шаг 2. Создание «Задачи»

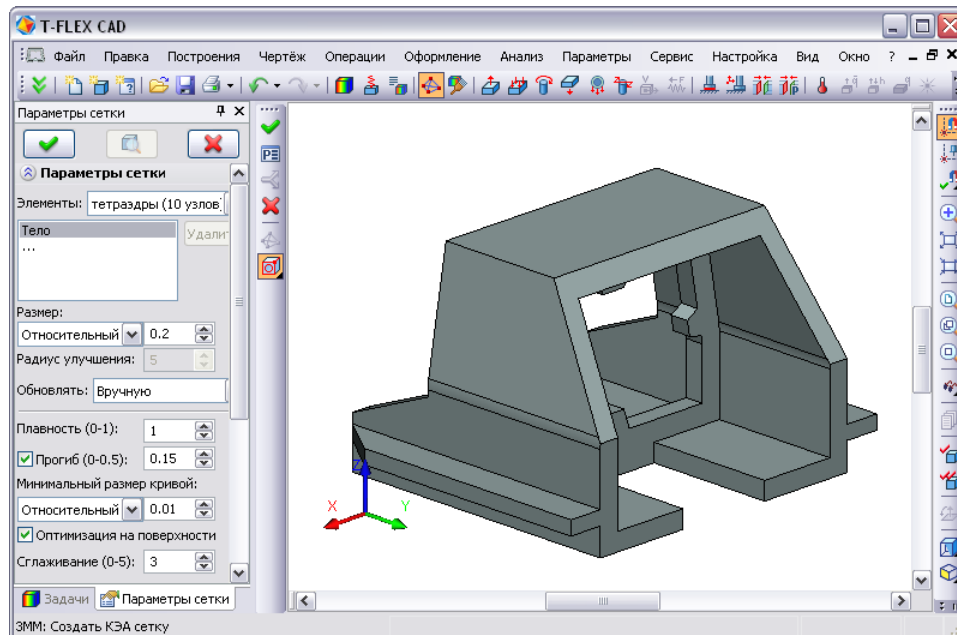
После того, как трёхмерная модель изделия была построена в T-FLEX CAD 3D или импортирована в систему, можно приступить к подготовке конечно-элементной модели. Любой вид расчёта в T-FLEX Анализе начинается с создания «Задачи» с помощью команды «Новая задача» меню «Анализ» T-FLEX CAD (**«Анализ|Новая Задача|Конечно-элементный анализ»**). При создании задачи пользователь определяет её тип («Статический анализ», «Частотный анализ», «Анализ Устойчивости», «Тепловой анализ»). Кроме того, если в сцене присутствует более одного твёрдого тела, необходимо указать, для какого из тел сцены мы создаём задачу.

Создадим для нашей модельной детали задачу типа «Статический анализ».



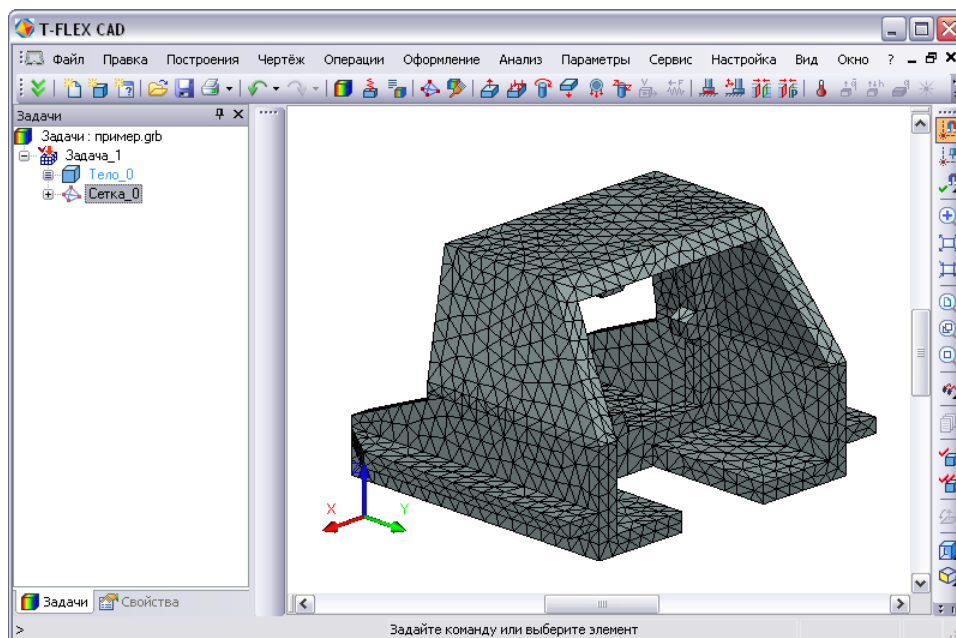
Создание задачи конечно-элементного анализа


По умолчанию, при создании новой задачи включен режим автоматического запуска команды **«Анализ|Сетка»** применительно к вновь созданной задаче. Поэтому, после успешного создания задачи появится диалог управления настройками генерации конечно-элементной сетки, по завершении которого мы получим сеточную модель из тетраэдров, аппроксимирующую твердотельную модель изделия.



Команда **«Анализ|Показать окно задач»** открывает окно задач, в котором в виде дерева отображаются существующие в данном документе задачи и их элементы.


Только что созданная задача является активной. Вновь создаваемые элементы задач и выполняемые команды Анализа будут относиться к активной задаче.



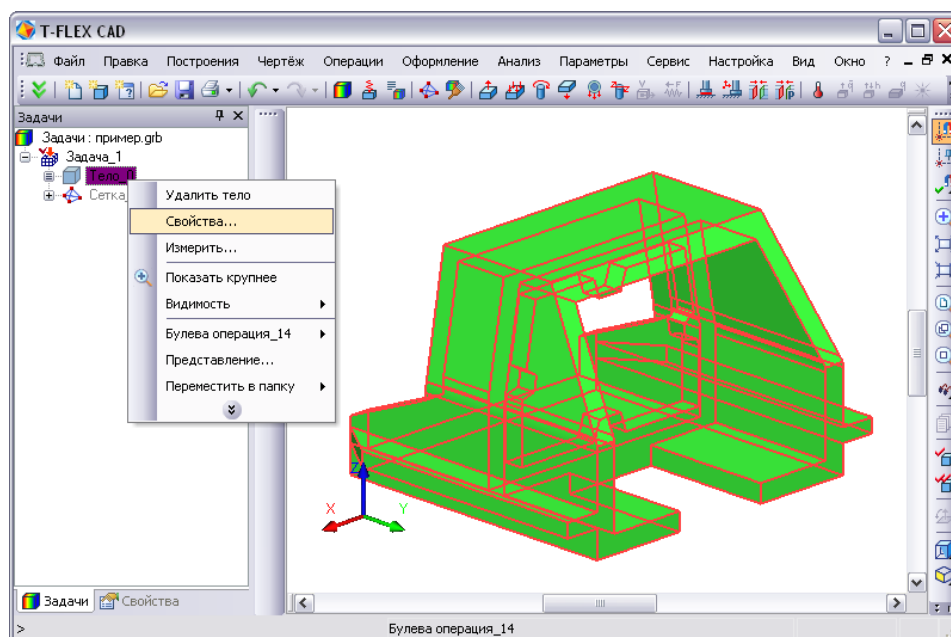
Если в документе много разных задач, то активной может быть только одна. Переключение между активными задачами осуществляется через контекстное меню, вызванное  по имени задачи. Для неактивных задач доступна команда «активизировать».

### Шаг 3. Назначение материала

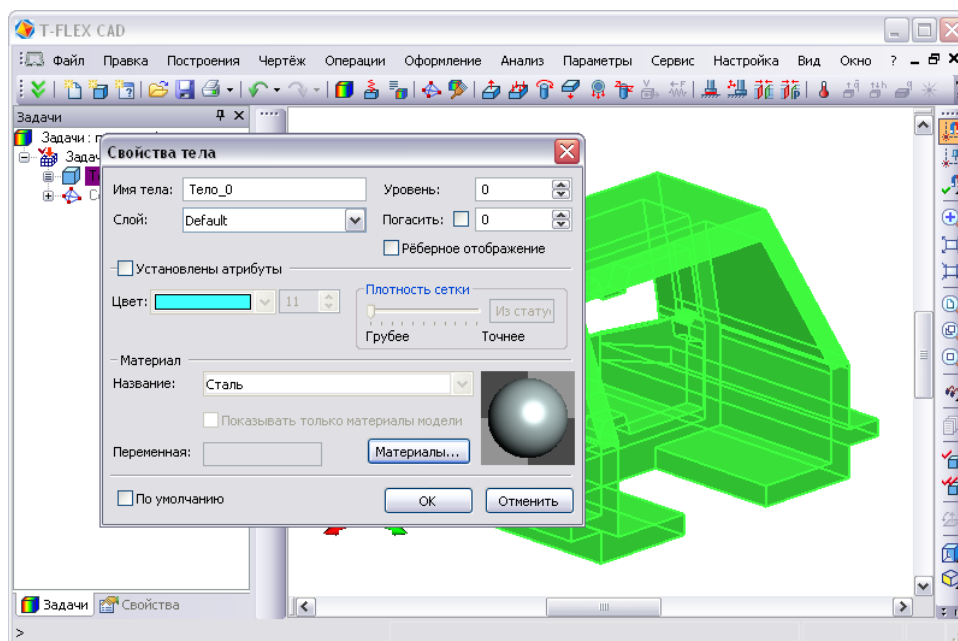
Для того чтобы осуществлять какие-либо расчёты с твердотельной моделью детали необходимо определить материал, из которого она изготовлена.

В T-FLEX Анализе есть две возможности задания материала для выполнения анализа. По умолчанию, в расчёте используются характеристики материала «с операции». Назначение материала для трёхмерной модели осуществляется в окне свойств операции. Для проверки или изменения материала в этом случае нужно вызвать окно параметров операции из контекстного меню по  на трёхмерном теле, созданном операцией, или по имени операции в окне задач.

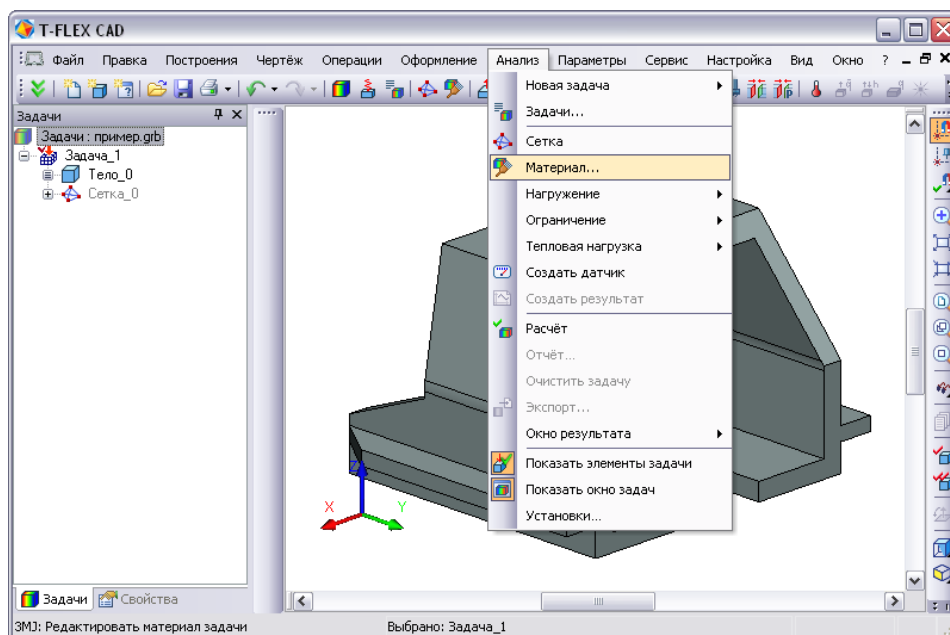




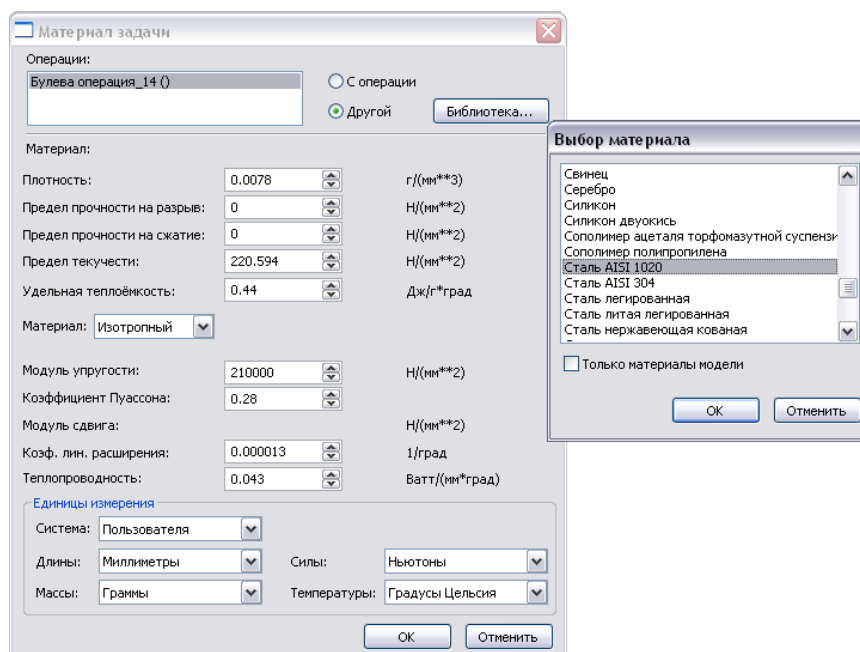
В диалоге свойств операции можно выбрать материал из стандартной библиотеки материалов T-FLEX CAD. При необходимости пользователь может пополнять стандартную базу материалов T-FLEX CAD своими материалами и изменять характеристики любых материалов из этой библиотеки. Более подробную информацию по работе с материалами T-FLEX CAD можно прочесть в документации по T-FLEX CAD, в книге «Трёхмерное моделирование», глава «Материалы».



Кроме стандартной библиотеки материалов T-FLEX CAD, для расчёта может быть использован материал из базы материалов T-FLEX Анализа. Доступ к базе материалов Анализа для текущей задачи осуществляется по команде **«Анализ|Материал»** или из контекстного меню дерева задач, отображаемого в окне задач.



Назначим для нашей модели материал «Сталь/AISI 1020» из базы материалов T-FLEX Анализа.

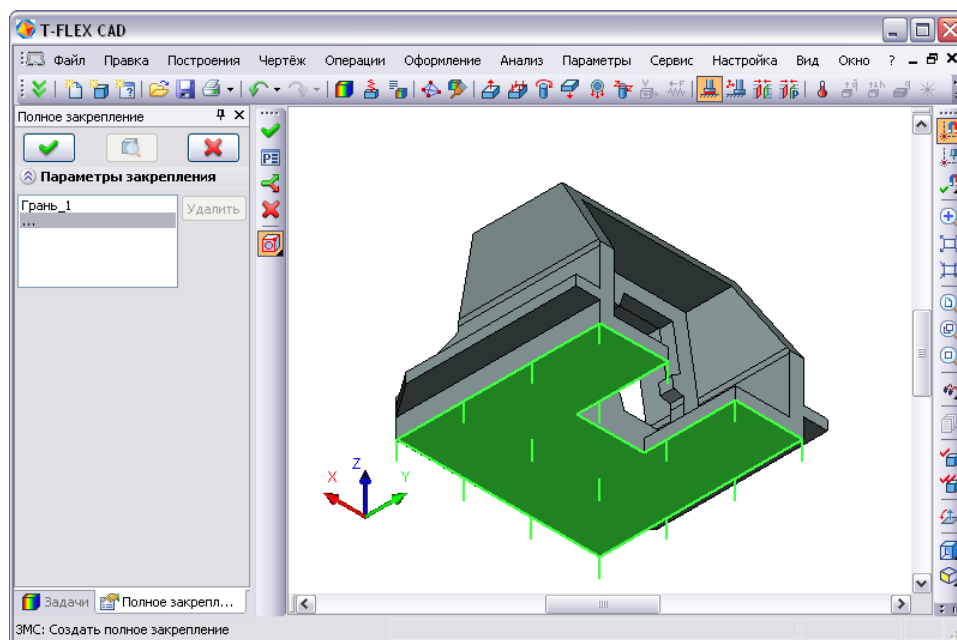


## Шаг 4.1 Наложение граничных условий. Задание закреплений

Для успешного решения физической задачи в конечно-элементной постановке помимо создания конечно-элементной сетки, необходимо корректно определить так называемые «граничные условия». В статике их роль выполняют закрепления и приложенные к системе внешние нагрузки.

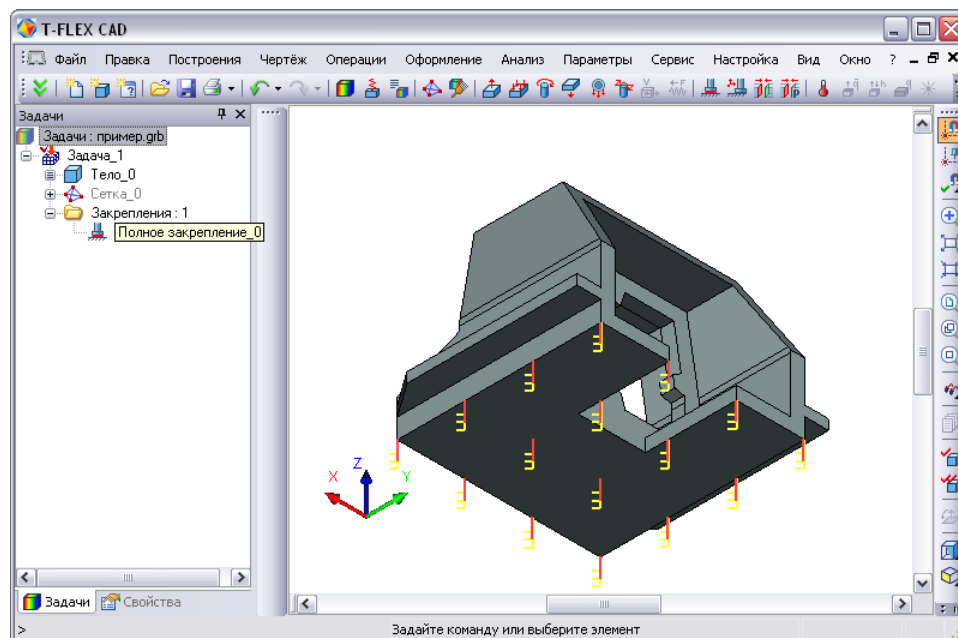
Для задания закреплений в T-FLEX Анализе предусмотрены три команды: **«Полное закрепление»**, **«Частичное закрепление»** и **«Контакт»**. Команда **«Анализ|Ограничение|Полное закрепление»** применяется к вершинам, граням и рёбрам модели. Она определяет, что данный элемент трёхмерного тела полностью неподвижен, т.е. сохраняет своё первоначальное расположение и не меняет своего положения под действием приложенных к системе нагрузок.

Используя команду **«Анализ|Ограничение|Полное закрепление»**, укажем с помощью  неподвижную грань нашей модели.



При задании граничных условий изображение конечно-элементной сетки автоматически гасится, чтобы дать возможность привязки граничных условий к элементам твердотельной модели (граням, рёбрам, вершинам).

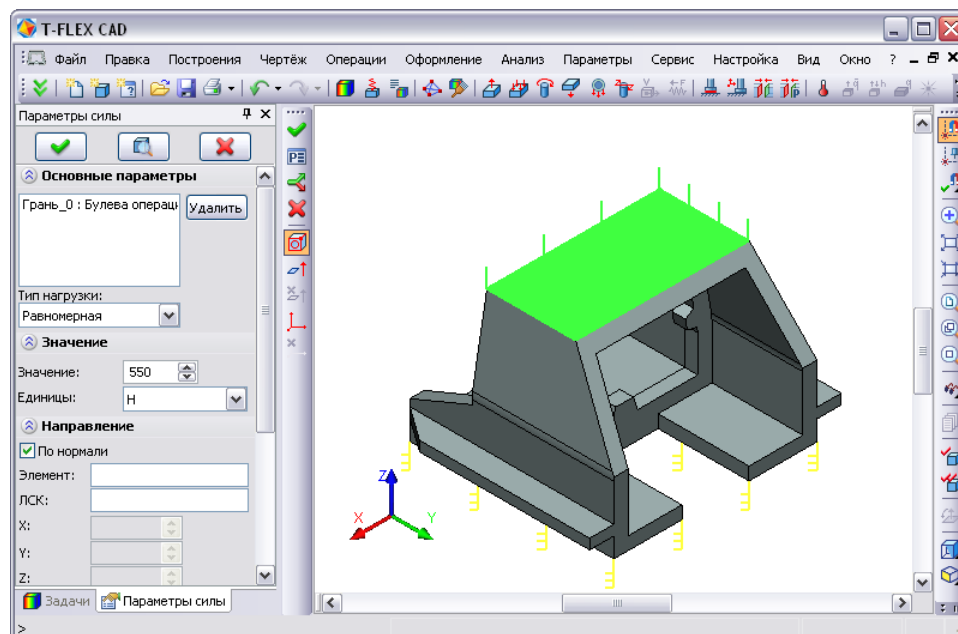
После успешного завершения команды создания закреплений в дереве задач, отображаемом в окне задач, появляется соответствующий элемент, указывающий на наличие данного граничного условия. В модельном окне T-FLEX CAD закрепление грани также отображается с помощью условных трёхмерных элементов (декораций).



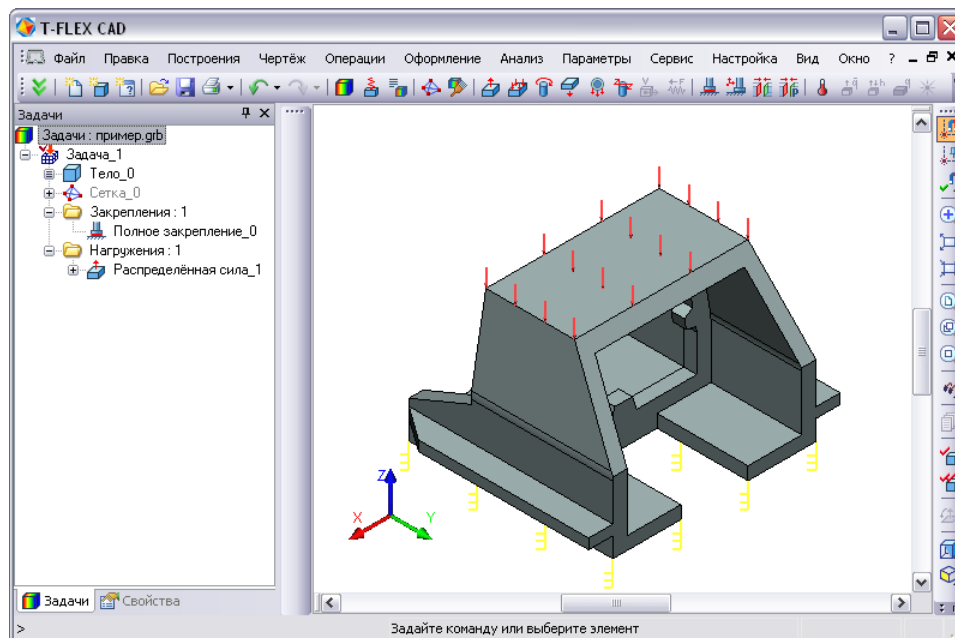
## Шаг 4.2 Наложение граничных условий. Задание нагружений

Для задания нагружений в T-FLEX Анализе предусмотрен набор специализированных команд, доступ к которым осуществляется из меню **«Анализ|Нагружение»**.

Используя команду **«Анализ|Нагружение|Сила»**, укажем грань «Корпуса», на которую приложена нагрузка. В диалоге свойств команды в поле **«Значение»** указываем значение силы (550 Ньютонов). Созданная сила равномерно распределится по указанной грани. Изначально направление действия силы берется по нормали к указанной плоской грани. При желании можно задать вектор направления действия силы.



После завершения команды создания нагружения на трёхмерной модели изделия появляется условное отображение созданных нагружений в виде условных обозначений, приложенных к соответствующим элементам модели.



После успешного завершения команды задания нагружений в дереве задач имеются в наличии все четыре элемента, необходимые для выполнения расчёта:

- сетка;
- материал;
- закрепление;
- нагружение.

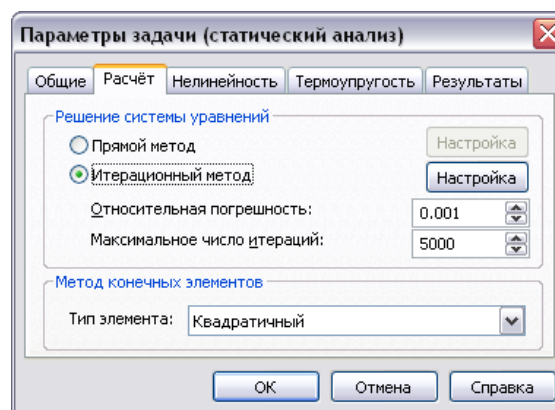
## Шаг 5. Выполнение расчёта

После создания конечно-элементной сетки и наложения граничных условий можно инициализировать команду **«Анализ|Расчёт»** и запустить процесс формирования систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и их решения.

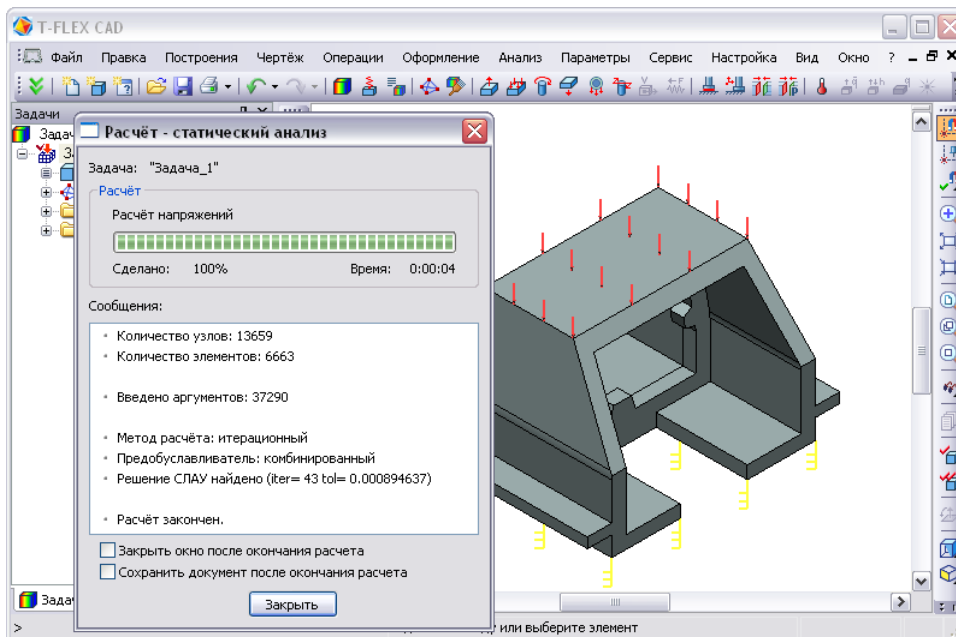
Доступ к команде «Расчёт» можно также получить из контекстного меню соответствующей задачи в дереве задач, отображаемом в окне задач.

Режимы для формирования СЛАУ и методы их решения выбираются автоматически процессором T-FLEX Анализ. Пользователь может самостоятельно изменить опции расчёта в диалоге свойств задачи, который по умолчанию открывается перед началом расчёта.


В процессе решения СЛАУ доступен диалог с отображением этапов расчёта.



Процесс решения СЛАУ может занимать значительное время на задачах с сетками из большого количества тетраэдров. По окончании расчёта выводится соответствующее диагностическое сообщение.

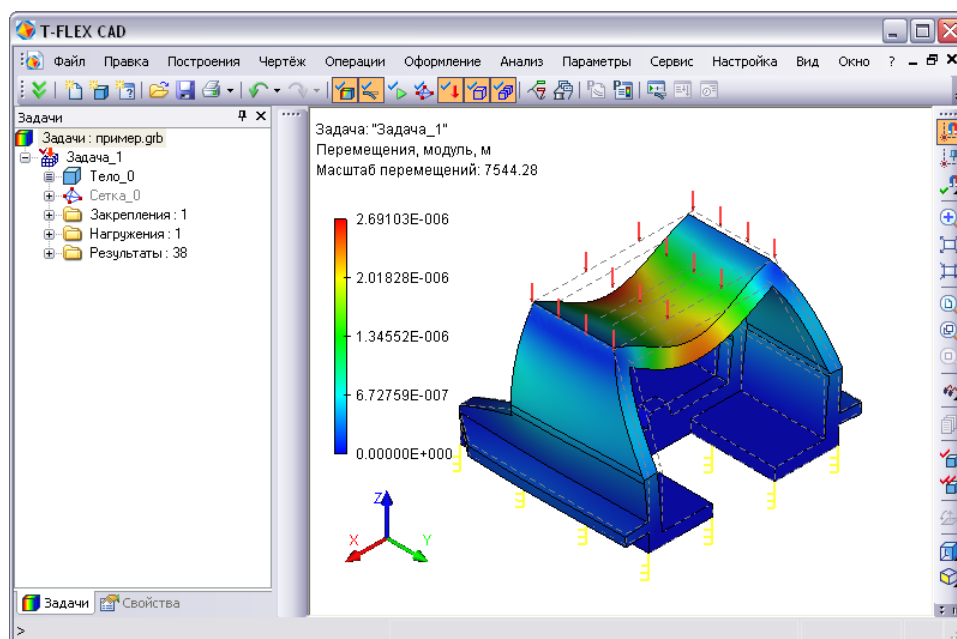


## Шаг 6. Анализ результатов расчёта

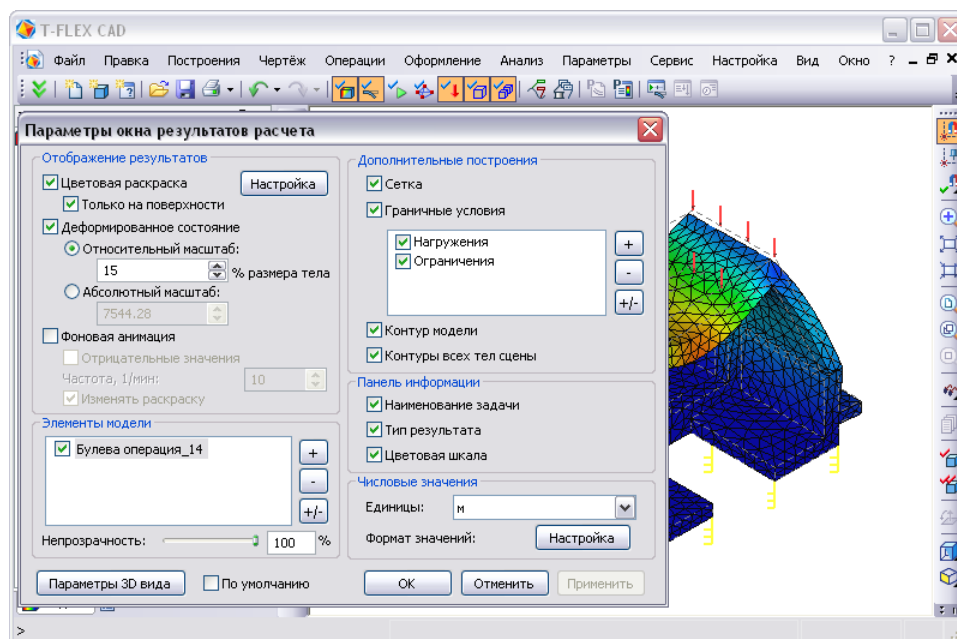
Результаты расчёта отражаются в дереве задач. Доступ к результатам обеспечивается из контекстного меню для выбранной в дереве задач задачи по команде **«Открыть»** или **«Открыть в новом окне»**, а также по . Визуализация результатов осуществляется в отдельном 3D окне T-FLEX CAD.

Одновременно может быть открыто несколько окон с результатами одной или разных задач. Для пользователя доступны все команды масштабирования и позиционирования сеточной модели с результатами расчётов, используемые при работе с трёхмерными моделями в T-FLEX CAD. Кроме того, есть набор специализированных команд и опций, позволяющих решать разнообразные сервисные функции по обработке результатов расчётов. Коротко отметим наиболее важные из них.





**Управление отображением сеточной модели.** Доступ осуществляется по двойному клику в области окна просмотра результатов расчёта или по команде «Свойства» контекстного меню. Пользователь может задать различные режимы отображения результатов расчёта – с сеткой, без сетки, отображать ли контур исходной детали и других тел, присутствующих в сборке, отображать деформированное состояние, анимировать изображение и т.п.

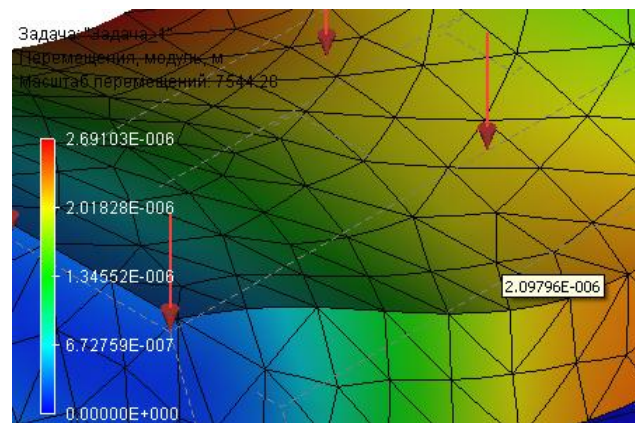
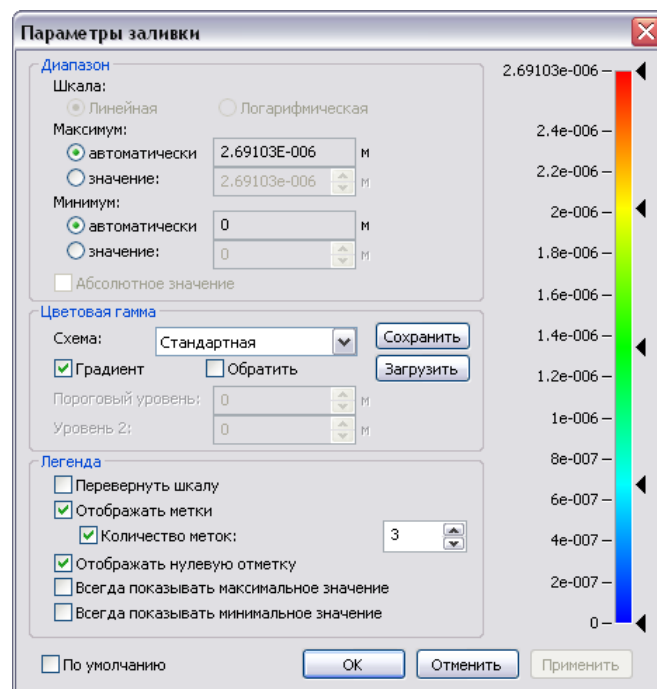


**Фоновая анимация** – позволяет воспроизвести поведение исследуемой модели при плавно меняющейся нагрузке, с одновременным отображением полей напряжений или перемещений, соответствующих переменной нагрузке.

**Настройка шкалы.** Доступ осуществляется по двойному клику в области шкалы окна просмотра результатов расчёта или по команде **«Настройки заливки...»** контекстного меню в окне просмотра результатов расчёта. Пользователь имеет набор возможностей по настройке панели отображения числовых значений. Можно использовать несколько предопределённых типов шкал, а также есть уникальная возможность гибкой настройки шкалы любого цветового наполнения. Также имеется возможность установить минимальное и максимальное значения шкалы, выбрать отображение логарифмической шкалы.

**Динамическое зондирование результата.** Постпроцессор T-FLEX Анализа предоставляет удобную возможность для вывода результата непосредственно под курсором манипулятора «мышь». Пользователю достаточно навести курсор на интересующее его место сеточной модели, и появляется точное значение результата в этом месте. Зондирование работает и для режима отображения деформированного состояния модели. При зондировании внутренних участков модели можно использовать инструмент «Плоскость обрезки» T-FLEX CAD.

**Создание отчёта** – результаты решения задачи могут быть сохранены в виде независимого электронного документа. Доступ к диалогу формирования отчёта для активной задачи осуществляется из меню **«Анализ|Отчёт...»** или через пункт контекстного меню **«Отчёт...»** задачи, выбранной в дереве задач.



## ПОДГОТОВКА КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИЗА (ПРЕПРОЦЕССОР)

---

Основное назначение Препроцессора T-FLEX Анализа – подготовка исходных данных о подлежащей анализу физической задаче в виде конечно-элементной модели, которая будет адекватно отражать геометрические и физические свойства моделируемого изделия. Эта конечно-элементная модель затем обрабатывается Процессором T-FLEX Анализа, и в результате получается решение исходной задачи. Подготовка конечно-элементной модели не требует от пользователя специфических знаний в области конечно-элементного анализа. Она осуществляется на основе построенной геометрической модели в интерактивном режиме с помощью команд Препроцессора, работа с которыми описана в данной главе. Результатом работы Препроцессора является конечно-элементная модель изделия, которая содержит:

- конечно-элементную сетку;
- сведения о материалах;
- граничные условия, соответствующие моделируемой физической задаче.

Последовательность создания конечно-элементной модели в T-FLEX Анализе в большинстве случаев не имеет значения, т.е. пользователь может сначала построить конечно-элементную сетку, а затем наложить граничные условия, или, наоборот, сначала задать нагрузки и ограничения, и лишь затем сгенерировать сетку из конечных элементов. Однако непременным условием корректной конечно-элементной модели является обязательное наличие всех её составляющих – сетки из конечных элементов (тетраэдров), характеристик материалов и приложенных к системе внешних воздействий.

В модельном окне T-FLEX CAD сетка и граничные условия отображаются визуально непосредственно (сетка) или с помощью условных обозначений (граничные условия). Используя это визуальное отображение, пользователь может оценить корректность задаваемых им данных.

### Виды конечно-элементных моделей

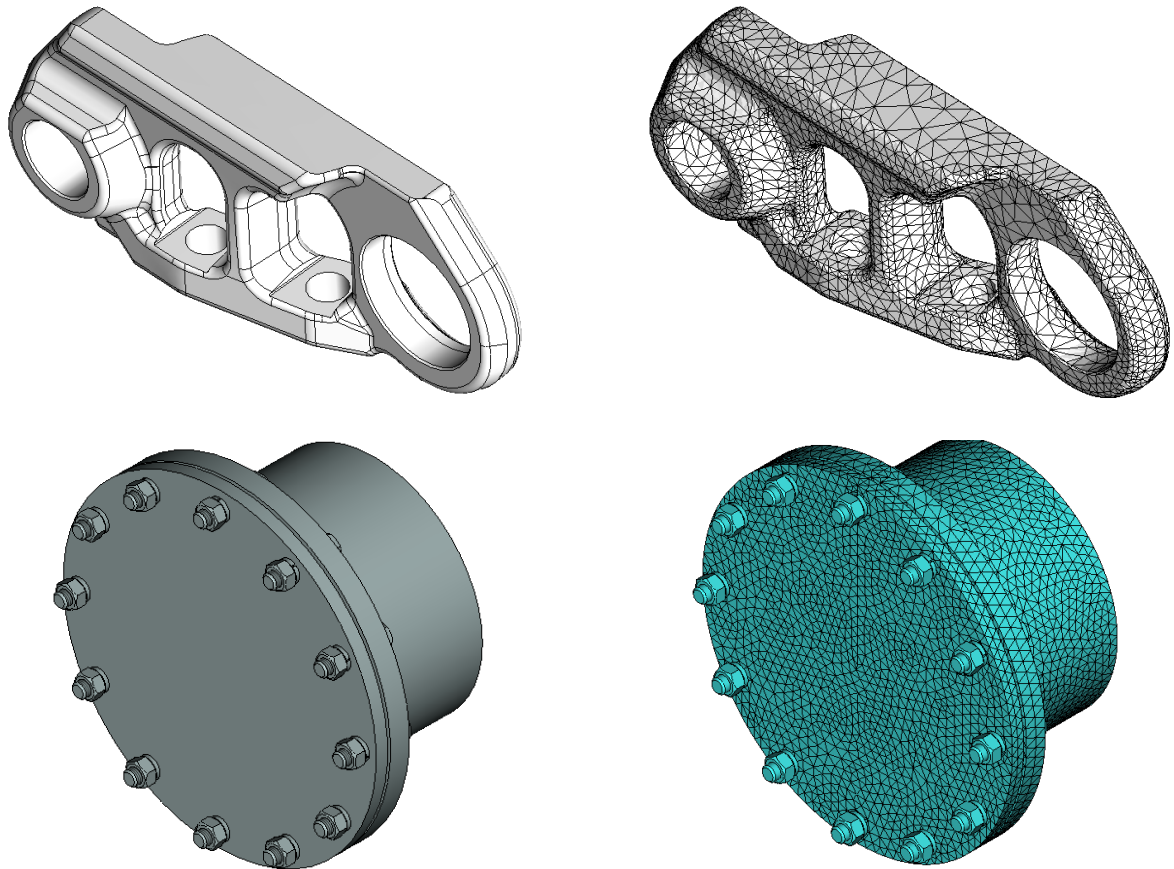
---

В зависимости от геометрических особенностей подлежащей анализу конструкции, в T-FLEX Анализе возможно построение конечно-элементных моделей трёх типов:

- тетраэдральная конечно-элементная модель;
- пластинчатая конечно-элементная модель;
- гибридная конечно-элементная модель.

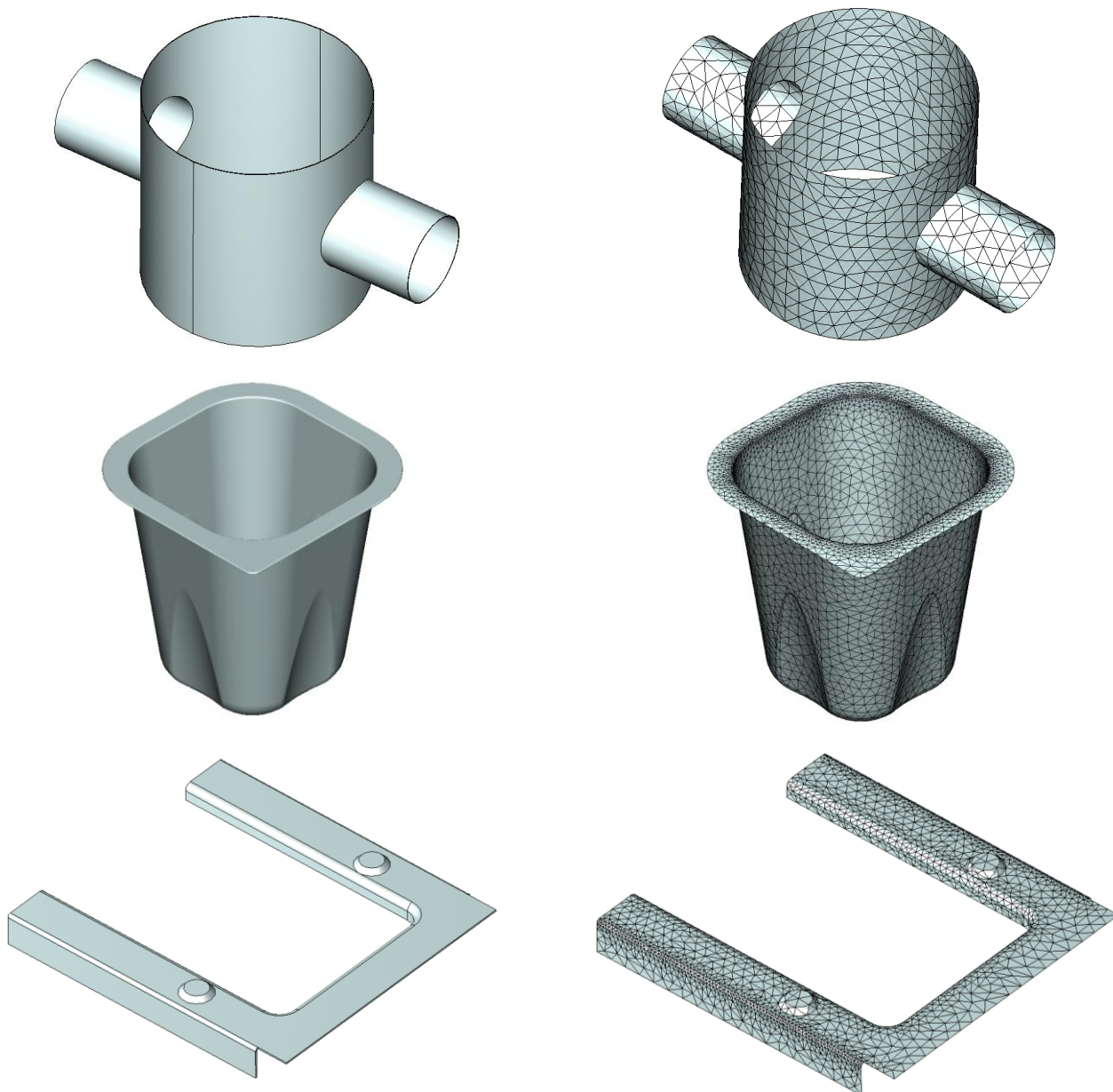
Рассмотрим подробнее случаи использования каждого вида конечно-элементных сеток.

**Тетраэдральная конечно-элементная модель.** В данном случае для аппроксимации геометрии моделируемого изделия используется его представление конечными элементами тетраэдральной формы. Тетраэдральная конечно-элементная сетка хорошо аппроксимирует сколь угодно сложную форму изделия и обеспечивает удовлетворительные результаты моделирования физических задач для объектов произвольной формы, характерные геометрические размеры которых по трём измерениям (длина, ширина, высота) сопоставимы между собой. К таким объектам можно отнести большинство деталей и узлов традиционного машиностроения и приборостроения.



**Типичные машиностроительные объекты и их тетраэдральные конечно-элементные модели**

**Пластиначатая конечно-элементная модель.** Значительный класс конструкций, используемых в человеческой деятельности, имеет особую геометрическую форму, при которой одно из измерений (толщина) значительно меньше двух других - ширины и длины. Такие конструкции принято называть тонкостенными. Например, в машиностроении такими конструкциями могут служить корпуса всевозможных машин, улитки турбин; в приборостроении – гибкие упругие элементы: сильфоны, мембраны, в том числе гофрированные, тарельчатые пружины; в строительстве - покрытия и перекрытия, пандусы, навесы и козырьки; в кораблестроении - корпуса судов; в авиастроении - фюзеляжи и крылья самолётов; в промышленности – всевозможные емкости: цистерны, резервуары и т.п.

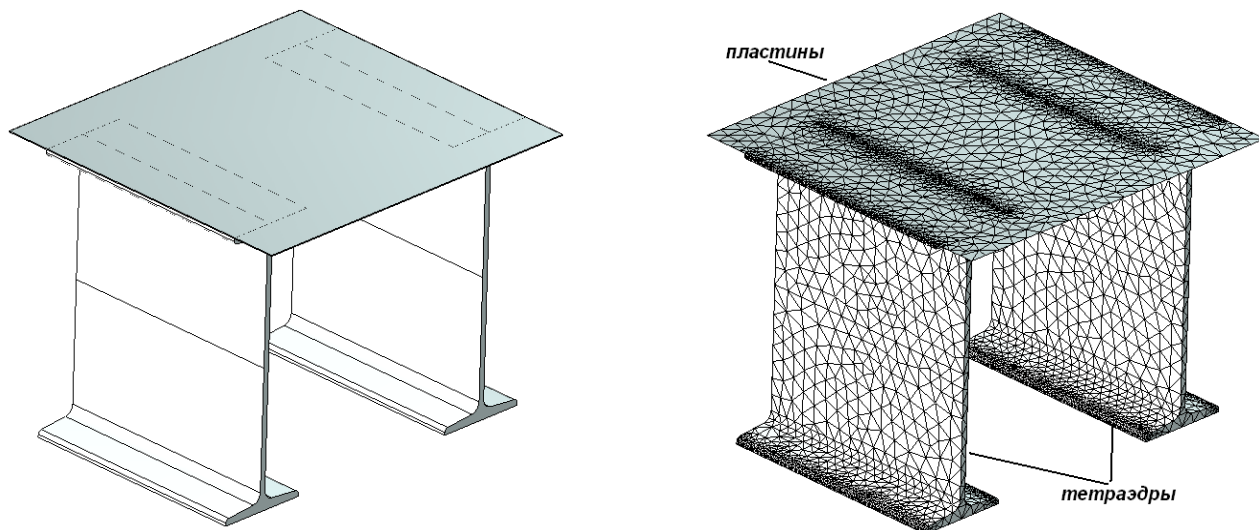


Примеры тонкостенных конструкций и их пластинчатые конечно-элементные модели

При конечно-элементном анализе тонкостенных конструкций можно использовать не тетраэдральные, а пластинчатые (оболочочные) конечные элементы, которые позволяют получить удовлетворительное решение с меньшими вычислительными затратами, чем при использовании объёмных конечных элементов.

**Гибридная конечно-элементная модель** одновременно состоит из конечных элементов обоих типов – тетраэдрами аппроксимируются части конструкции соответствующие объёмным телам с сопоставимыми по трём измерениям размерами. Тонкостенные же части конструкции аппроксимируются пластинчатыми элементами.





Примеры конструкций и их гибридные конечно-элементные модели

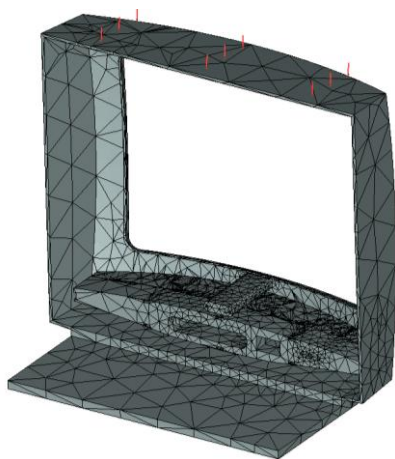
## Назначение и роль сеток

---

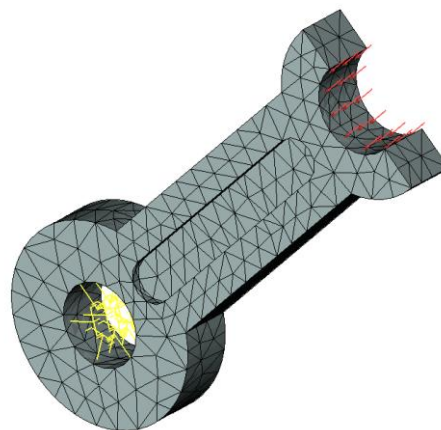
Основное назначение конечно-элементной сетки – адекватная аппроксимация геометрии моделируемого тела, учитывающая все важные для расчёта нюансы геометрии изделия. Препроцессор T-FLEX Анализа имеет эффективный автоматический генератор конечно-элементных сеток, который позволяет пользователю управлять различными режимами генерации сеток, чтобы получать сетки нужного качества на разных моделях. В T-FLEX Анализе для построения конечно-элементных сеток используются объёмные тетраэдральные и пространственные треугольные конечные элементы, которые, теоретически, позволяют с любой требуемой точностью аппроксимировать произвольную геометрию большинства изделий. Однако необходимо отметить несколько предварительных рекомендаций, касающихся корректности расчётных моделей при использовании конечных элементов.

**Во-первых**, качество получаемого решения может зависеть от *формы* конечных элементов. Наилучшие результаты конечно-элементного моделирования достигаются, если элементы (тетраэдры и треугольники), образующие сеточную модель, близки по форме к равносторонним. Особенно это справедливо для тетраэдральных элементов. Напротив, если сеточная модель содержит элементы, у которых ребра, образующие элемент, имеют сильно отличающиеся размеры, результаты моделирования могут иметь недостаточную точность. В этом случае желательно, используя параметры настроек генератора конечно-элементных сеток, добиться уменьшения количества подобных элементов.



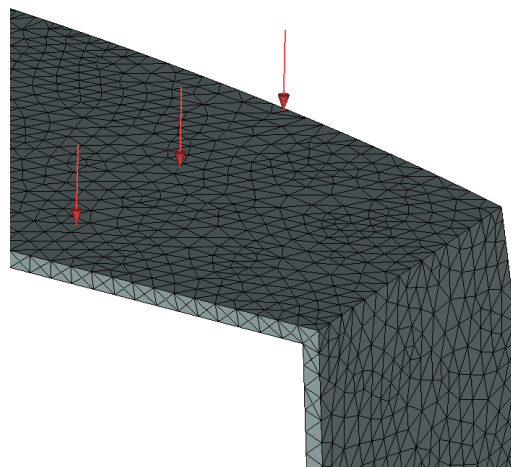
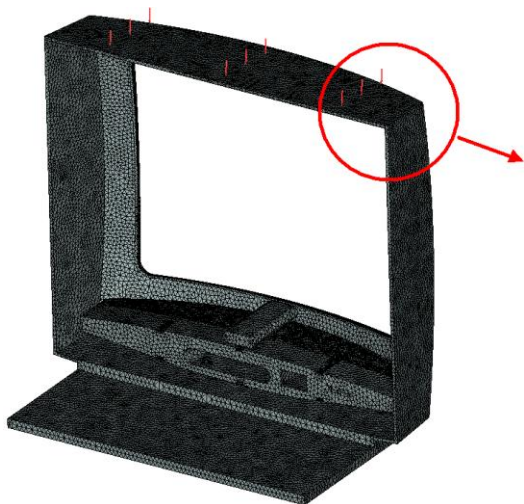


«Плохая» сетка конечно-элементной модели



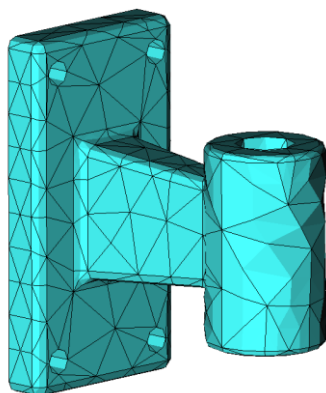
«Хорошая» сетка конечно-элементной модели

Таким образом, необходимо визуально или с помощью «Параметров сетки» контролировать «качество» построенной конечно-элементной модели, добиваясь по возможности более однородного распределения формы образующих сетку элементов.

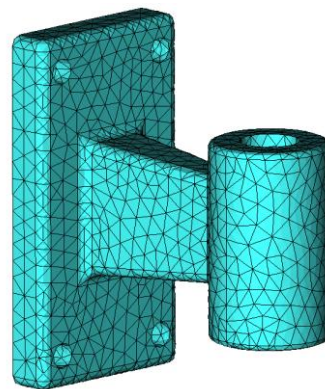


Более адекватная сеточная модель, полученная после использования настроек параметров сетки

**Во-вторых**, кроме формы конечных элементов на качество решения определяющим образом влияет также степень дискретизации исходной геометрической модели, т.е. «густота» конечно-элементной сетки. Пользователь может управлять этим параметром генератора сеток, указывая относительный или абсолютный средний размер конечных элементов, аппроксимирующих геометрию тела или меняя параметры, влияющие на генерацию сетки на криволинейных моделях. Обычно, более мелкое разбиение даёт лучшие по точности результаты. Однако следует помнить, что аппроксимация модели большим количеством маленьких конечных элементов неизбежно приводит к системе алгебраических уравнений большого порядка, что может существенно сказаться на скорости выполнения расчёта. Оценить качество конечно-элементной модели можно последовательным решением нескольких задач с различными возрастающими степенями дискретизации. Если решение (например, максимальные перемещения и напряжения) перестают заметно меняться при использовании более густой сетки, то можно со значительной долей уверенности считать, что мы достигли некоторого оптимального уровня дискретизации и дальнейшее увеличение дискретизации сетки нерационально.



**Относительный размер 0,2**



**Относительный размер 0,05**

Во многих случаях ориентировочным минимальным уровнем разбиения можно считать разбиение тела на два-три слоя конечных элементов в направлении действия нагрузжений и предполагаемых перемещений.

Кроме того, средствами генератора сеток возможно искусственное создание «сгущений» сетки в областях модели с резко меняющейся кривизной, в которых можно ожидать больших градиентов искомых величин (например, напряжений).

Таким образом, при построении конечно-элементной модели, необходимо уделять пристальное внимание генерируемой сеточной модели, следя за тем, чтобы конечно-элементная сетка соответствовала геометрии модели и имела достаточное качество с точки зрения обеспечения надёжного и достоверного решения моделируемой физической задачи.

## ***Виды и роль граничных условий***

---

Граничные условия различаются в зависимости от типа моделируемой физической задачи следующим образом.

Для задачи типа «**Статический анализ**» в качестве граничных условий выступают:

- ограничение «Полное закрепление»;
- ограничение «Частичное закрепление»;
- ограничение «Контакт»;
- ограничение «Упругое основание»;
- нагружение «Сила»;
- нагружение «Давление»;
- нагружение «Вращение»;
- нагружение «Ускорение»;
- нагружение «Цилиндрическая нагрузка»;
- нагружение «Крутящий момент»;
- тепловая нагрузка «Температура».

Для задачи типа «**Частотный анализ**» в качестве граничных условий выступают:

- ограничение «Полное закрепление»;
- ограничение «Частичное закрепление»;
- ограничение «Упругое основание».

Для задачи типа «**Анализ устойчивости**» в качестве граничных условий выступают:

- ограничение «Полное закрепление»;
- ограничение «Частичное закрепление»;
- ограничение «Упругое основание»;
- нагружение «Сила»;
- нагружение «Давление»;
- нагружение «Вращение»;
- нагружение «Ускорение»;
- нагружение «Цилиндрическая нагрузка»;
- нагружение «Крутящий момент».

Для задачи типа «**Тепловой Анализ**» в качестве граничных условий выступают:

- тепловая нагрузка «Температура»;
- тепловая нагрузка «Начальная температура»;
- тепловая нагрузка «Тепловой поток»;
- тепловая нагрузка «Конвективный теплообмен»;
- тепловая нагрузка «Тепловая мощность»;
- тепловая нагрузка «Излучение».
- ограничение «Тепловой контакт»

Для задачи типа «**Вынужденные колебания**» в качестве граничных условий выступают:

- ограничение «Полное закрепление»;
- ограничение «Частичное закрепление»;
- ограничение «Контакт»;
- ограничение «Упругое основание»;
- нагружение «Сила»;
- нагружение «Давление»;
- нагружение «Вращение»;
- нагружение «Ускорение»;
- нагружение «Цилиндрическая нагрузка»;
- нагружение «Крутящий момент»;
- кинематическое нагружение «Осциллятор»

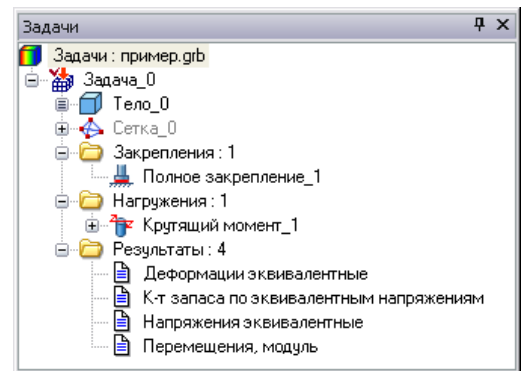
Суть физической задачи определяется типом приложенных к системе граничных условий. Для получения корректного и достоверного решения пользователю необходимо хорошо представлять физическую сторону анализируемого явления, чтобы задать граничные условия, соответствующие

реальным условиям эксплуатации изделия. Результат решения задачи будет полностью определяться набором и параметрами граничных условий, определёнными пользователем. В случае неверного истолкования пользователем смысла задаваемой механической или тепловой нагрузки или ограничения, может быть получено решение, не отвечающее сути анализируемого физического явления. Отметим, что процесс назначения граничных условий не доступен полной автоматизации, поэтому ответственность за корректность приложенных к системе нагрузжений и ограничений с точки зрения физики решаемой задачи лежит на пользователе.

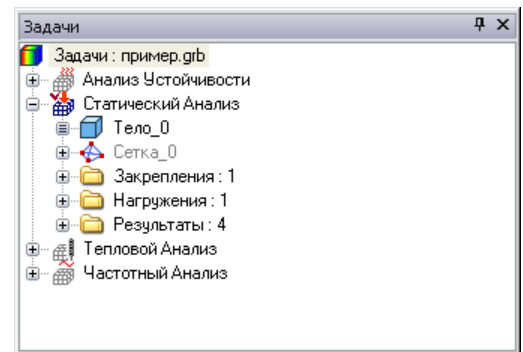
## **Управление «Задачами», команды управления задачами**


Задача – особый объект системы, объединяющий в себе данные и элементы, необходимые для выполнения расчёта модели. Задача содержит необходимые настройки параметров расчёта, а также информацию об используемых объектах (твёрдых телах и/или оболочках), на основе которых строится конечно-элементная модель, о нагрузках, ограничениях и конечно-элементной сетке. После выполнения вычислений задача также содержит результаты расчёта. Для задачи определяется тип выполняемого расчёта: статический, частотный, тепловой, расчёт на устойчивость.

Для работы с задачами существует специальное служебное окно «Задачи» (в окне «3D модель» имеются те же самые функции). В окне задач отображается в виде дерева вся информация о подготовленных задачах в данном документе, а также обо всех элементах, входящих в состав каждой задачи. Через окно задач можно осуществлять быстрый доступ к элементам каждой задачи. Каждый тип задач, а также каждый элемент задачи помечается своей специальной пиктограммой. Некоторые элементы задач (нагрузки, закрепления, результаты) объединены в группы.




В одном документе можно создать несколько задач для выполнения разных расчётов. Задача, с которой в данный момент ведётся работа, называется активной. Иконка активной задачи помечается красной галочкой в окне задач. Для того чтобы сделать активной другую задачу, нужно воспользоваться командой контекстного меню «Активизировать».



Работа в окне задач производится при помощи контекстных меню, в которых есть все необходимые команды. Состав контекстных меню зависит от того, какой элемент задачи был выбран при нажатии .

Для работы со списком задач есть специализированная команда:


Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<3ML>	«Анализ Задачи...»	

В диалоговом окне этой команды отображается список всех существующих задач текущего документа. Справа от списка расположены кнопки для вызова основных команд.

Для быстрого создания похожих задач одного вида, с одной и той же моделью (например, чтобы сравнить результаты расчета с разной сеткой или материалом) можно воспользоваться функцией копирования задачи.

По умолчанию включена опция «Копировать сетку», т. е. задача копируется со всеми входящими в неё элементами, кроме результатов. Если отключить эту опцию, то конечно-элементная сетка копироваться не будет, то есть для рассматриваемых задач она будет общей.




Для создания новой задачи используйте команду:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<ЗМН>	«Анализ Новая задача Конечно-элементный анализ»	

После вызова команды в окне свойств появляется возможность выбора типа создаваемой задачи.

На данном этапе можно только задать тип для новой задачи. После создания задачи произвести смену её типа будет возможно только при условии очищения данных задачи (включая потерю результатов расчёта). Задача создаётся на основе одной или нескольких твердотельных операций. Если в сцене присутствует всего одно тело, то оно выбирается автоматически. Если в сцене присутствует несколько подходящих объектов, то пользователь должен выбрать нужные.

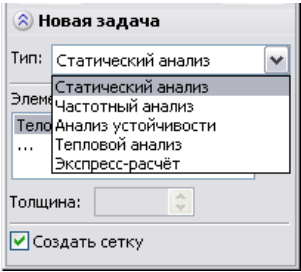
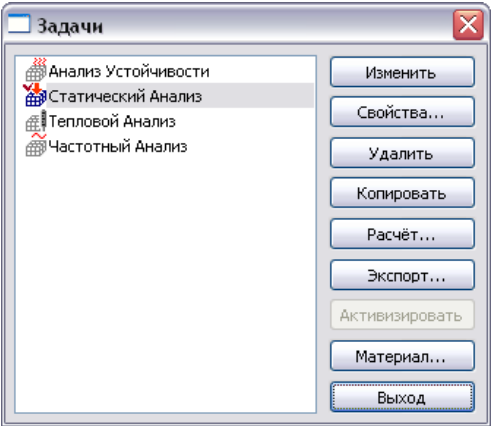
Выбрать объекты можно при помощи опции:

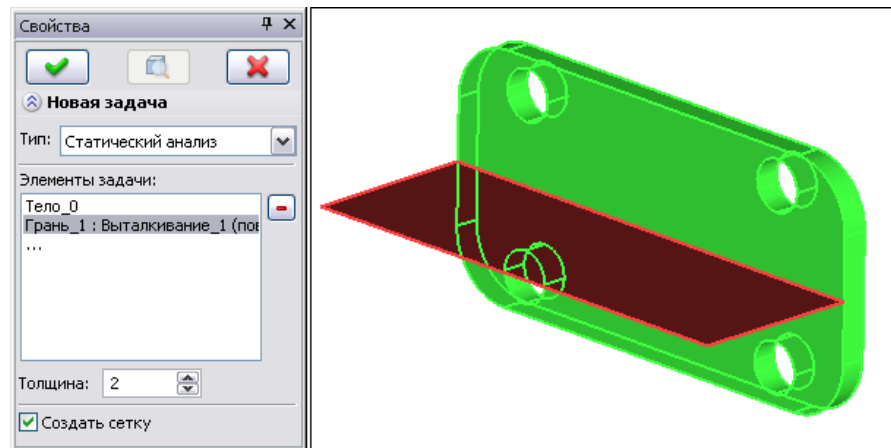
	<E>	Выбрать тело
	<E>	Выбрать грань
	<S>	Выбрать все элементы

Отменить выбор всех объектов можно при помощи опции:

	<R>	Отменить выбор всех элементов
---	-----	-------------------------------

При расчёте тонкостенных конструкций пользователь может определить, какие фрагменты модели необходимо рассчитывать с использованием пластинчатых (треугольных) конечных элементов и какие с использованием тетраэдральных конечных элементов. Поэтому в качестве «Элементов задачи», которые будут участвовать в расчёте, необходимо выбрать грани и/или тела. Для каждой выбранной грани установить «Толщину».





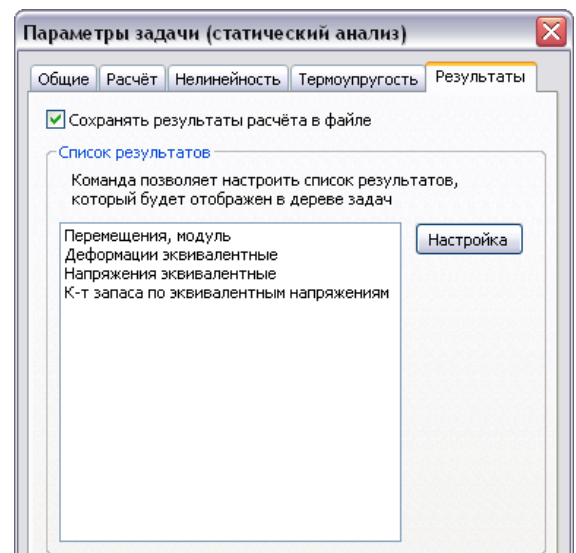
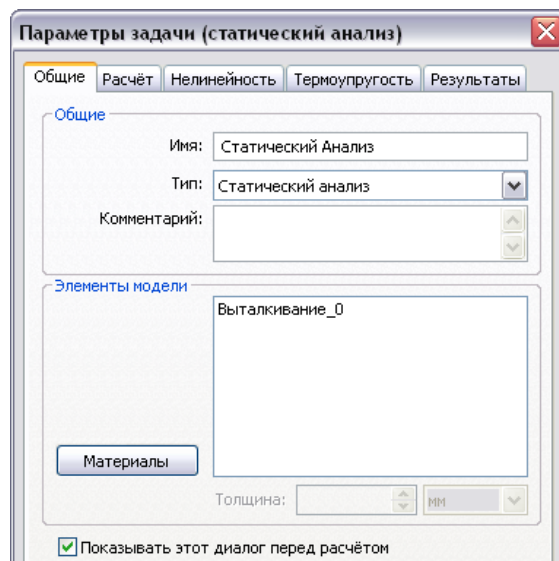
Система допускает использование в расчёте нескольких выбранных элементов задачи, в том числе и элементов разных типов – тел и граней (в этом случае получается так называемая «гибридная модель», состоящая из пластин и твёрдых тел). При этом все элементы задачи считаются единым целым (подобно клеевому соединению), и для них рассчитывается одна сетка. Поэтому каждый элемент задачи обязательно должен соприкасаться хотя бы с одним из оставшихся элементов, участвующих в данном расчёте, и эти элементы не должны проникать друг в друга.

Для каждого отдельного элемента можно назначить характеристики материала.

Созданная задача получает определённый набор настроек, новых свойств и методов её решения – в зависимости от выбранного типа. Изменить остальные настройки задачи можно после её создания в диалоге свойств. Диалог свойств задачи может появляться автоматически перед выполнением расчёта или при вызове соответствующей команды из контекстного меню, вызываемого при выборе задачи в окне задач, а также из окна работы со списком задач.

## Общие свойства задач

Для всех типов задач есть ряд похожих свойств, задаваемых на закладках [Общие] и [Результаты] в диалоге параметров.





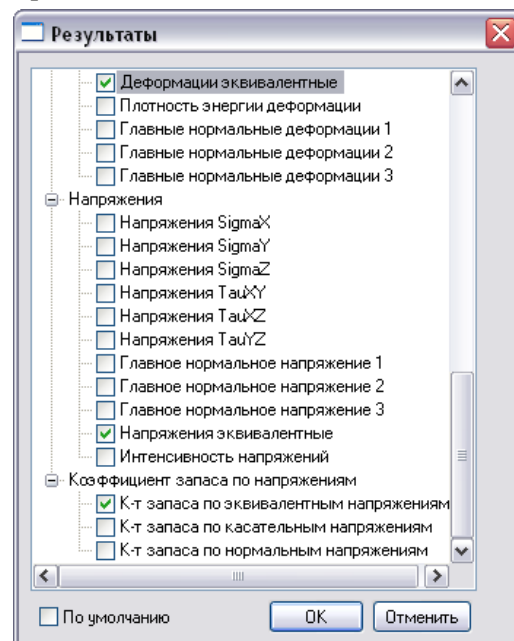
На закладке [Общие] можно задать имя задачи, изменить тип задачи (Статический Анализ, Частотный Анализ, Анализ Устойчивости, Тепловой Анализ) и вписать комментарий. Комментарий используется для записи необходимых пояснений и выводится при формировании отчёта.

Рекомендуется включить флаг «Показывать этот диалог перед расчётом». При этом можно будет задавать свойства задачи и регулировать алгоритмы расчёта перед его выполнением.

На закладке [Результаты] можно увидеть список результатов, которые будут добавлены в дерево задач после завершения расчёта.

Настроить этот список можно в диалоге, вызываемом нажатием кнопки [Настройка]. Пользователь может установить метки напротив любой позиции, если данный вид результата он захочет в дальнейшем исследовать. Указанные позиции будут выведены в окно задач. Далее нужные результаты можно будет загрузить в окно просмотра результатов расчёта.

Настроить список результатов можно или до, или после выполнения расчёта. От количества выводимых результатов не зависит общее время расчёта. Система в любом случае вычислит все результаты, а в окне задач покажет только те из них, которые выбрал пользователь.



Диалог настройки списка результатов, отображаемых в дереве задач

## Задание материала

Материал – это элемент T-FLEX CAD. Он содержит перечень характеристик реального материала, с которым пользователь имеет дело в действительности.

Характеристики материала можно условно разделить на два типа. К характеристикам первого типа относятся характеристики, влияющие на отображение трёхмерных объектов в 3D окне. Характеристики второго типа – это различные физические параметры материала такие, как плотность, модуль упругости, предел прочности на разрыв и т.д. Именно характеристики материала, относящиеся ко второму типу, являются необходимыми при проведении расчётов.

Реакция детали на нагрузки зависит от того, из какого материала она сделана. Программе необходимо знать упругие свойства материала, из которого состоит деталь. Программой поддерживаются изотропные и анизотропные материалы, которые могут быть ортотропными и трансверсально-изотропными.

**Изотропные материалы** характеризуются тем, что физические свойства материала (коэффициент упругости, коэффициент Пуассона, коэффициенты теплопроводности и линейного расширения) считаются инвариантными к направлению ориентации тела в пространстве, т.е. одинаковыми во всех направлениях. Подавляющее большинство конструкционных материалов, используемых в машиностроении и приборостроении, обычно рассматриваются как изотропные.

По умолчанию свойства материала модели для расчёта задачи наследуются из параметров используемой операции. О назначении материала операции можно прочесть в книге по трёхмерному моделированию. Кроме того, есть альтернативный способ задания свойств материала задачи.

Задание индивидуального материала задачи осуществляется при помощи команды:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<ЗМ>	«Анализ Материал»	

После вызова команды появляется диалоговое окно.

Свойства материала

Материалы конечно-элементного анализа

Операция задачи	Тип материала	Имя материала
Выталкивание_2	Другой	материал пользователя
Выталкивание_3	С Тела/Опер...	Сталь
Выталкивание_4	С Тела/Опер...	Сталь
Выталкивание_5	С Тела/Опер...	Сталь

☐ С Тела/Операции
 ☒ Другой
 

Библиотека

Плотность:

7.8e-006

кг/(мм³)

Предел прочности на разрыв:

399.826

Н/(мм²)

Предел прочности на сжатие:

399.826

Н/(мм²)

Предел текучести:

220.594

Н/(мм²)

Удельная теплоёмкость:

440

Дж/(кг•град)

Закон усталости:

не задан

Создать

Структура материала:

Изотропный

Модуль упругости:

220000

Н/(мм²)

Коэффициент Пуассона:

0.29

Модуль сдвига:

87000

Н/(мм²)

Козф. линейного расширения:

1.3e-005

1/град

Теплопроводность:

0.043

Ватт/(мм•град)

Единицы измерения

Система:

Пользователя

Силы:

Ньютоны

Длины:

Миллиметры

Температуры:

Градусы Цельсия

Массы:

Килограммы

OK

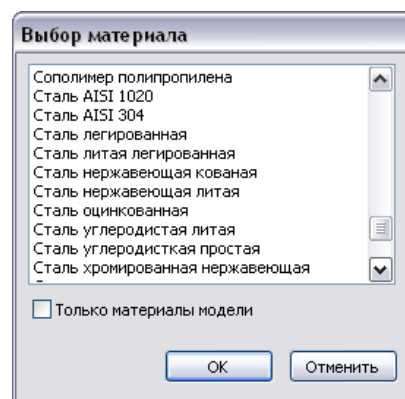
Отмена



По умолчанию переключатель включен в положение «С операции». Это означает, что свойства материала берутся с материала операции. Если установить переключатель в положение «Другой», то станут доступными поля для ввода характеристик материала задачи. Можно воспользоваться кнопкой **[Библиотека]**, которая вызывает окно с набором предварительно подготовленных материалов.

После выбора материала его характеристики считываются и появляются в основном диалоге.

В нижней части диалогового окна расположены поля для выбора единиц измерения основных физических величин.



## Задание свойств анизотропных материалов

Анизотропные материалы отличаются от изотропных тем, что их физические свойства (упругость, коэффициенты Пуассона, теплопроводность и т.д.) имеют различные значения в зависимости от ориентации физического тела в пространстве. Среди всего многообразия анизотропных конструкционных материалов наибольшее практическое значение имеют т.н. **ортотропные** и **трансверсально-изотропные** материалы. T-FLEX Анализ обеспечивает работу с обоими из этих видов анизотропных материалов.

### Ортотропные материалы

**Ортотропный** материал – вид анизотропного материала, для которого имеются три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии, относительно которых его характеристики не изменяются. К таким материалам относятся древесина, бумага, фанера, (если пренебречь неоднородностью расположения волокон, т.е. размеры образца достаточно велики) композиты регулярного строения (например, слоистый стеклопластик, тканевой стеклопластик).

Для ортотропных материалов обобщенный закон Гука записывается как:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_y - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_z, \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_x + \frac{1}{E_2} \sigma_y - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_z, \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_x - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_y + \frac{1}{E_3} \sigma_z, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{12}} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G_{23}} \tau_{yz}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G_{13}} \tau_{xz} \end{aligned} \right\}$$

Из 12 коэффициентов этого уравнения (упругих постоянных) только 9 являются независимыми, т.к. в силу симметрии правой части уравнений обобщенного закона Гука имеют место соотношения:

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}, \quad E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23}, \quad E_3 \nu_{13} = E_1 \nu_{31}$$

Модули сдвига  $G_{ij}$  не зависят от других упругих констант. Однако для некоторых материалов могут выполняться дополнительные зависимости между модулями сдвига и упругости:

$$G_{12} = \frac{E_1 E_2}{E_1 (1 + 2\nu_{12}) + E_2}$$

Чтобы задать ортотропный материал необходимо в диалоге «Свойства материала» открываемом кнопкой «Дополнительно...», задать структуру материала: «Ортотропный». После чего появится группа параметров задания ортотропных свойств материала.

Структура материала: Ортотропный

	X:	Y:	Z:	
Модуль упругости:	69000	70000	69000	N/(мм <sup>2</sup> )
Коэффициент Пуассона:	0.31	0.33	0.08	
Козф. лин. расширения:	3.4e-005	1.4e-005	2.4e-005	1/град
Теплопроводность:	0.15	0.2	0.3	Ватт/(мм*град)
	XY:	YZ:	XZ:	
Модуль сдвига:	52000	51000	53000	N/(мм <sup>2</sup> )

В этом диалоге задаются следующие параметры:

Модули упругости:  $E_1, E_2, E_3$

Коэффициенты Пуассона:  $\nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{31}$

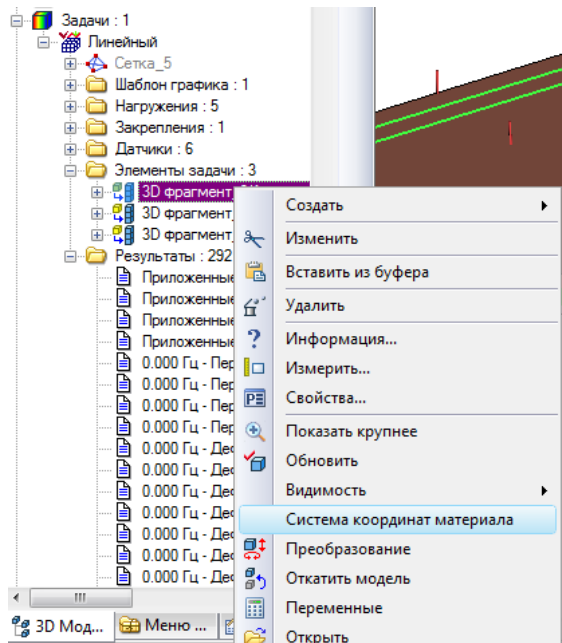
Модули сдвига:  $G_{12}, G_{23}, G_{13}$

Коэффициенты линейного расширения вдоль осей системы координат:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

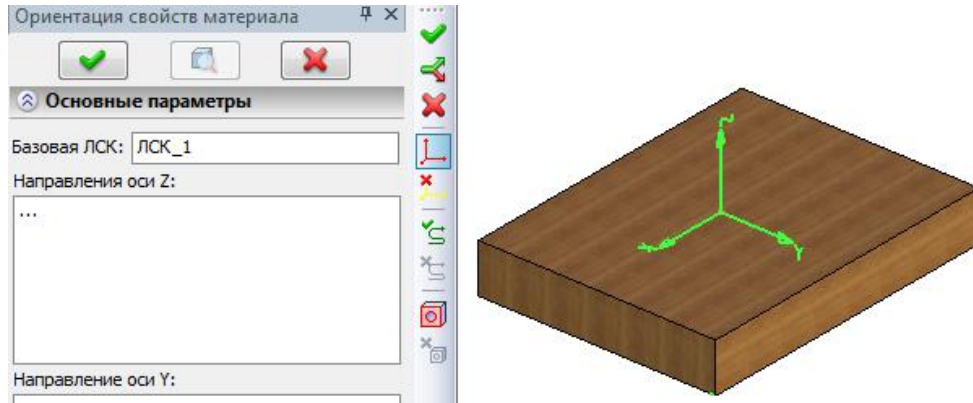
Коэффициенты теплопроводности вдоль осей системы координат:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Направление осей симметрии определяется системой координат, заданной для каждого тела. В свойствах материала должна быть задана структура материала: «Ортотропный». Один и тот же ортотропный материал может быть задан для нескольких тел, а для каждого тела направления осей симметрии могут быть заданы отдельной системой координат. По умолчанию используется глобальная система координат.

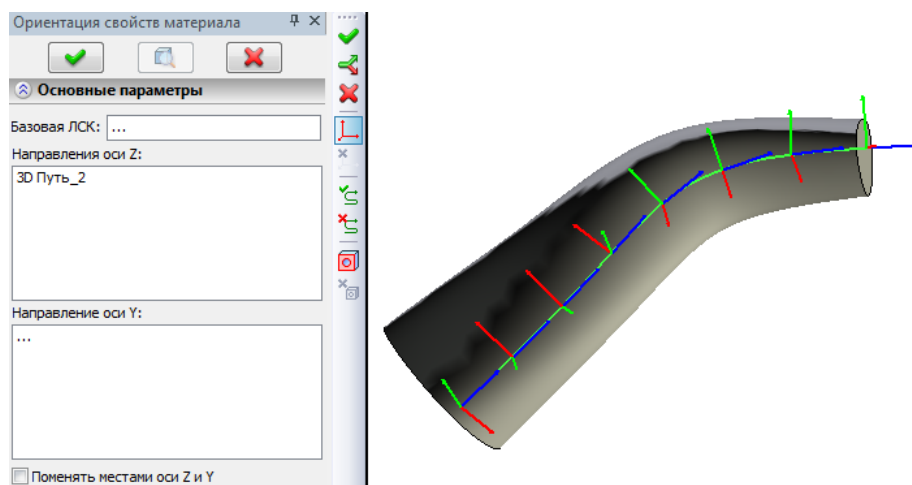
Главные направления упругости (нормали к плоскостям симметрии) будут направлены вдоль осей системы координат, указанной для тела. Чтобы определить систему координат необходимо в контекстном меню данного тела в дереве задачи выбрать пункт «Система координат материала»,



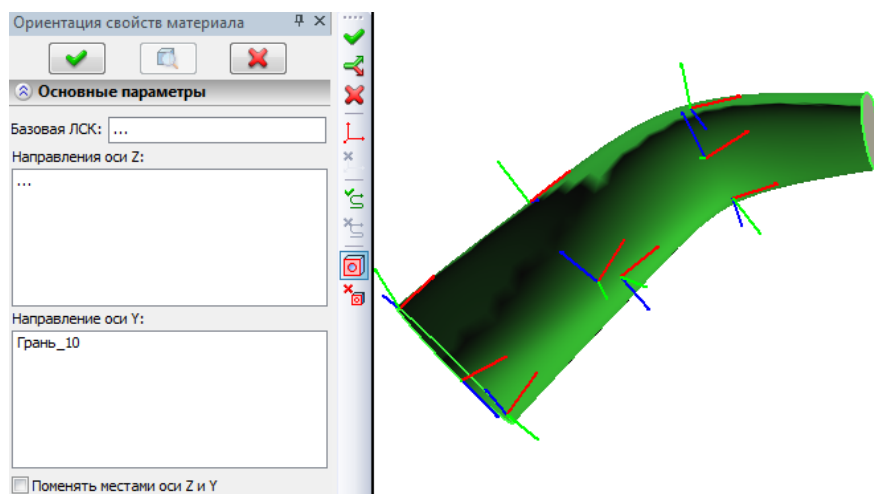
после чего указать ЛСК. Выбранная ЛСК заносится в список как базовая и вдоль направления осей будут определяться оси симметрии ортотропного или трансверсального изотропного тел.



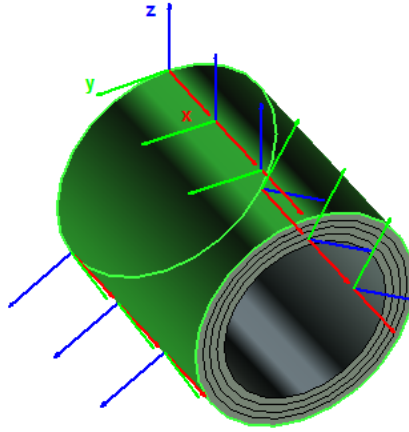
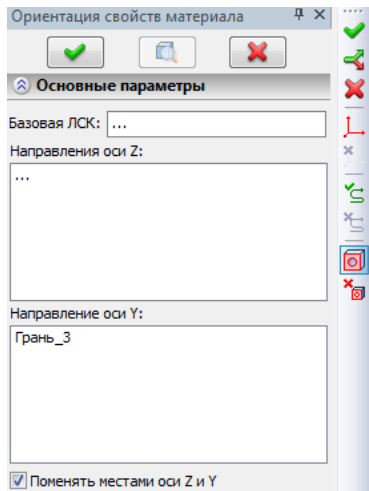
Кроме того, если анизотропное тело деформировано или получено протягиванием, можно задать еще закон изменения направления оси Z (для ортотропного и трансверсально-изотропного тел) и дополнительно оси Y (для ортотропного тела).



Для задания закона изменения направления оси Z можно выбрать 3D путь (без указания базовой ЛСК) или несколько рядом идущих путей – в последнем случае направление оси симметрии в каждой точке тела будет определяться по направлению касательной в ближайшей точке одного из путей.



Для задания закона изменения направления оси Y необходимо выбрать одну или несколько криволинейных или плоских поверхностей (без указания базовой ЛСК). Направление оси Y в каждой точке тела будет определяться по направлению нормали в ближайшей точке одной из поверхностей.



Переключатель «Поменять местами оси Z и Y» предназначен для использования мгновенных осей XY, расположенных в касательной плоскости выбранной поверхности, в качестве плоскости симметрии трансверсально – изотропного тела (см. далее). При этом параметры  $E$ ,  $\nu$ ,  $G$  будут относиться к плоскости XY, а параметры  $E'$ ,  $\nu'$ ,  $G'$  – ко всем плоскостям, содержащим ось Z.

Просмотреть, какая ЛСК связана с данным ортотропным телом можно вызвав эту же команду для тела в дереве задач.

### Трансверсально-изотропные материалы

**Трансверсально – изотропный** материал – вид анизотропного материала, для каждой точки которого имеются параллельные плоскости упругой симметрии, в которых вдоль всех направлений его характеристики не изменяются. Ортогонально к плоскостям симметрии располагаются оси симметрии вращения. Примером таких материалов могут служить слоеные трубки, поперек слоев которых (по радиусу) свойства материала иные, чем вдоль образующей и касательной.

Для трансверсально-изотропных материалов обобщенный закон Гука записывается как:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) - \frac{\nu'}{E'}\sigma_z, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x + \sigma_y) - \frac{\nu'}{E'}\sigma_z, \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu'}{E'}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E'}\sigma_z, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G'}\tau_{yz}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G'}\tau_{xz} \end{aligned} \right\}$$

Трансверсально – изотропный материал характеризуется следующими упругими постоянными: модуль упругости  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$ , и модуль сдвига  $G$ , действующие в плоскостях

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

симметрии, при этом  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ . Во всех плоскостях, ортогональных плоскостям симметрии действуют модуль упругости  $E'$ , коэффициент Пуассона  $\nu'$ , и модуль сдвига  $G'$ , а для некоторых материалов может выполняться соотношение:

$$G' = \frac{EE'}{E(1+2\nu') + E'}$$

Структура материала: Трансверсально изотропный ▼

	X, Y:	Z:	
Модуль упругости:	<input type="text" value="69000"/>	<input type="text" value="69000"/>	Н/(мм <sup>2</sup> )
Коэффициент Пуассона:	<input type="text" value="0.33"/>	<input type="text" value="0.33"/>	
Коэф. лин. расширения:	<input type="text" value="0.000034"/>	<input type="text" value="0.000034"/>	1/град
Теплопроводность:	<input type="text" value="0.15"/>	<input type="text" value="0.15"/>	Ватт/(мм*град)
	XZ, YZ:		
Модуль сдвига:	<input type="text" value="52000"/>		Н/(мм <sup>2</sup> )

Чтобы задать трансверсально – изотропный материал необходимо в диалоге «Свойства материала» открываемом кнопкой «Дополнительно...», задать структуру материала: «Трансверсально – изотропный». После чего появится группа параметров задания свойств материала. В этом диалоге задаются следующие параметры:

Модуль упругости в направлении плоскости симметрии и ортогонально к ней:  $E, E'$ ;

Коэффициенты Пуассона в направлении плоскости симметрии и ортогонально к ней:  $\nu, \nu'$ ;

Модули сдвига в направлении плоскости симметрии и ортогонально к ней:  $G, G'$ ;

Коэффициенты линейного расширения  $\alpha, \alpha'$  и теплопроводности  $\lambda, \lambda'$


Система координат, в которой действуют эти параметры задается также как для ортотропного тела (см. выше).

Типичный порядок действий при задании свойств анизотропного материала:

1. Создать новый материал командой меню Сервис|Материалы...
2. В диалоге «Свойства материала» открываемом кнопкой «Дополнительно...», задать структуру материала: «Ортотропный» или «Трансверсально – изотропный». Ввести упругие постоянные, тепловые постоянные.
3. Назначить анизотропный материал телам.
4. После создания задачи назначить каждому анизотропному телу систему координат командой контекстного меню каждого тела. При необходимости задать закон изменения направления оси Z по пути и закон изменения направления оси Y по нормали к поверхности.
5. Вернуться к заданию граничных условий задачи.

## Построение сетки

Для работы с сеткой используйте команду:


Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<3MM>	«Анализ Сетка»	

Команда создания сетки может автоматически вызываться после завершения создания новой задачи. Команда запускает процедуру работы с сеткой в активной задаче. В зависимости от наличия сетки в активной задаче, система будет создавать новую или редактировать существующую сетку.






Сетка создаётся на основе операции, выбранной при создании текущей активной задачи. Для одной задачи может быть создана только одна сетка.

При создании сетки можно выбрать элементы модели для получения локальных зон с измельчённой сеткой. Это делается с целью получения более точных результатов расчёта в критических местах модели.

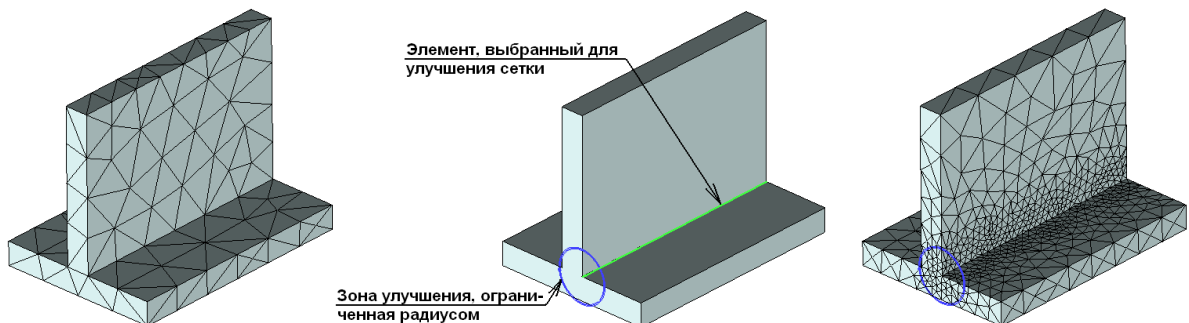
Выбор элементов для улучшения сетки можно с помощью опции автоменю:

	<L>	Выбор элементов для улучшения сетки
---	-----	-------------------------------------

Можно выбирать 3D узлы, вершины, рёбра и грани:

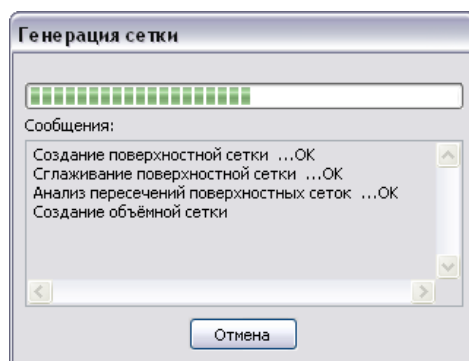
	<A>	Выбор граней, ребер, вершин
	<P>	Выбор 3D узел
	<V>	Выбор вершину
	<E>	Выбор ребро
	<F>	Выбор грань


В пределах **радиуса улучшения** (см. ниже) вокруг выбранного элемента модели размер элемента сетки будет равен размеру, указанному в параметрах сетки для выбранного элемента улучшения.



В момент расчёта сетки система выводит служебное окно, в котором отображает ход процесса генерации. В этом окне есть кнопка **[Отмена]**, при помощи которой можно остановить процесс расчёта сетки.

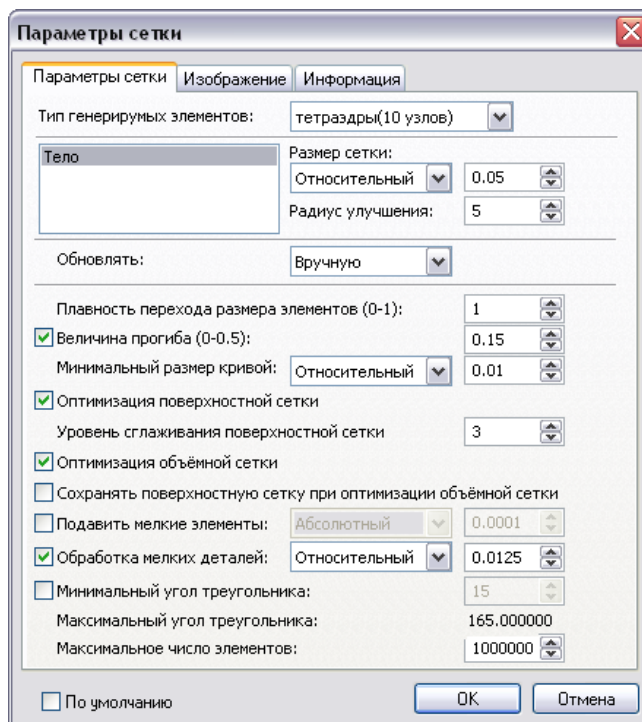




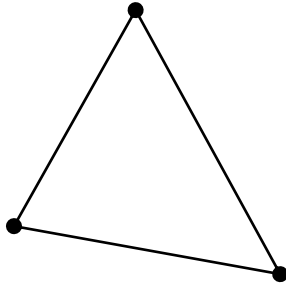
При изменениях параметрической модели может потребоваться обновление сетки. Система может автоматически обновлять сетку, если данная настройка установлена в параметрах сетки. Вручную команда обновления сетки запускается из контекстного меню при выборе сетки в окне задач .

## Параметры сетки

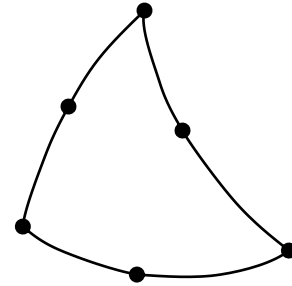
Настройки генерируемой сетки можно установить либо в окне свойств, либо в идентичном ему диалоге параметров.



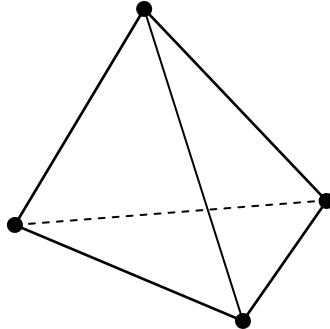
У конечных элементов, используемых в T-FLEX Анализе, существует два варианта – плоскогранный и криволинейный. Плоскогранный элемент имеет узлы только в вершинах, в то время как криволинейный элемент имеет также промежуточные узлы на серединах рёбер (см. рис.). Таким образом, тетраэдры содержат 4 или 10 узлов, а треугольники – 3 или 6 узлов.



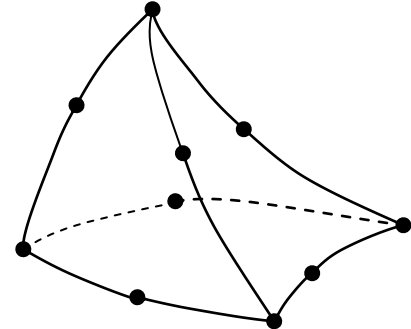
**3-узловой плоскогранный треугольный конечный элемент**



**6-узловой криволинейный треугольный конечный элемент**



**4-узловой плоскогранный тетраэдральный конечный элемент**



**10-узловой криволинейный тетраэдральный конечный элемент**

Применение криволинейных конечных элементов позволяет точнее аппроксимировать сложную геометрию границ и получать более высокую точность решения при меньшем числе элементов.

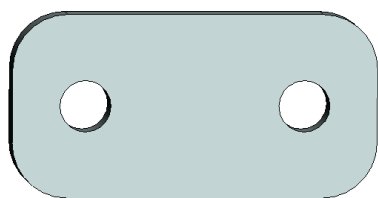
Таким образом, для более точного описания сложной геометрии границ необходимо использовать либо большое количество граничных элементов с прямыми сторонами (гранями), то есть плоскогранных конечных элементов, либо использовать криволинейные элементы.

Необходимо заметить, что при одинаковом шаге дискретизации генерация сетки криволинейных элементов требует больше времени, чем генерация сетки плоскогранных элементов, особенно на моделях с большим количеством радиусов и скруглений. В отдельных случаях сетка криволинейных элементов может не строиться совсем, или её построение может занимать неприемлемо долгое время.

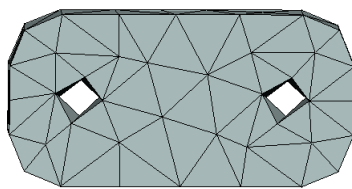
В тоже время разность получаемых результатов (например, максимумы перемещений и напряжений) на сетках из криволинейных и плоскогранных конечных элементов стремится к нулю, если использовать достаточно мелкое разбиение.

Поэтому, если для конкретной модели сложной геометрической формы не удаётся построить сетку криволинейных конечных элементов, или генерация такой сетки занимает слишком много времени, рекомендуется построить сетку плоскогранных конечных элементов с достаточно мелким шагом дискретизации, и использовать для расчёта её.

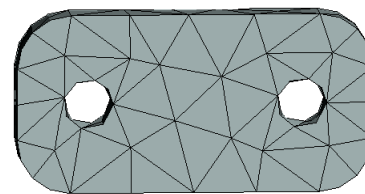
На иллюстрации ниже приведены примеры разбиения модели на конечные элементы каждого типа. Размер элементов сетки для повышения наглядности иллюстрации установлен несколько больший, чем требуется для расчёта.



Исходная модель



Сетка из плоскогранных элементов

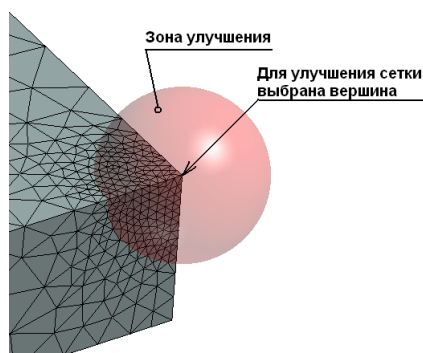


Сетка из криволинейных элементов

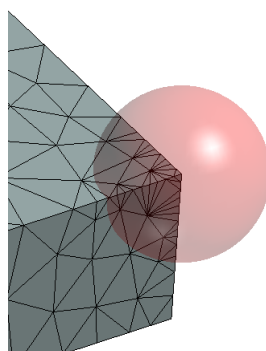
Настройка параметров обновления сетки осуществляется путём выбора варианта в соответствующем выпадающем списке. Возможен выбор из двух вариантов – по запросу, или автоматически (при пересчёте модели).

**Размер сетки.** Размер ребра конечного элемента генерируемой сетки может быть определён как **относительный** или **абсолютный**. В первом случае размер ребра задаётся как доля от самого большого ребра прямоугольника, охватывающего всю модель. При абсолютном размере ребро конечного элемента определяется в модельных единицах. Заданный размер корректируется системой таким образом, чтобы в итоге получить все элементы сетки с ребром примерно одного размера, близким к значению, указанному в параметрах. Для элементов модели, выбранных для улучшения сетки, можно установить только абсолютный размер.

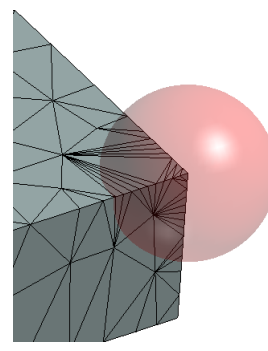
**Плавность перехода размера элементов.** Управляет скоростью распространения сетки от уменьшенных ячеек сетки к крупным ячейкам расчётного размера. Если фактор равен 1 (по умолчанию), то размер сетки приблизительно удваивается с каждым следующим элементом, пока его размер не достигнет крупного размера сетки. При уменьшении значения фактора, переход в размере произойдет за меньшее количество шагов (большие скачки в размере элемента). Если фактор равен 0, то размер ячейки сразу подскочит к более грубому размеру без перехода. Как правило, на практике чаще всего используются значения, близкие к единице.



Плавность = 1



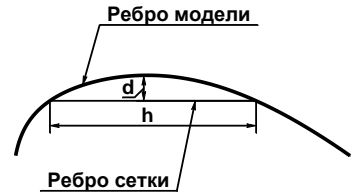
Плавность = 0,5



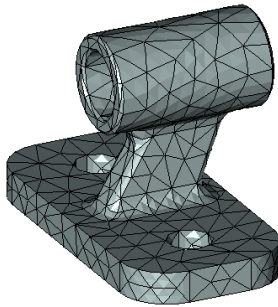
Плавность = 0

**Радиус улучшения.** Этот параметр можно установить только для элементов модели, выбранных для локального улучшения сетки. Радиус улучшения определяет размер зоны вокруг элемента, в пределах которой строится сетка с лучшими отдельно установленными характеристиками – как правило, меньшими размерами сетки. Расстояние отсчитывается от элемента, выбранного в качестве улучшения. Абсолютный размер сетки для каждого вспомогательного элемента устанавливается отдельно. Эту возможность на практике можно использовать для достижения более точных результатов вычисления примерно за то же время расчёта в процессоре, используя более грубую общую сетку для всей модели и более качественную сетку в критических точках.

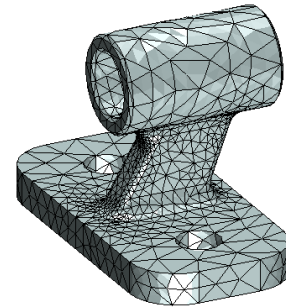
**Величина прогиба.** Параметр включает автоматическую обработку кривых поверхностей и устанавливает ограничение на минимальный размер элемента сетки при такой обработке. Ограничение задаётся в виде величины прогиба, значение которого вычисляется как отношение величины  $d$  к длине хорды  $h$  (см. рисунок). Ограничение может быть задано в пределах  $0 \div 0.5$ .



**Минимальный размер кривой.** Работает совместно с «Величиной прогиба». Устанавливает предельный минимальный размер сегмента кривой, до которой она может быть разбита. Параметр вводится для ограничения количества элементов сетки – на некоторых моделях типа конуса автоматическое разбиение кривых поверхностей для обеспечения заданной величины прогиба может производиться до бесконечности. Для этого параметра допускается ввод любых значений больше нуля.



Обработка кривых отключена



Обработка кривых включена

**Функции оптимизации** позволяют управлять процессом генерации более качественной сетки. Когда генератор создаёт сетку, он сначала рассчитывает предварительную сетку. Затем программа может применить некоторые действия к полученной предварительной сетке, чтобы улучшить её качество. Эти действия разделены на две части: **оптимизация**, которая изменяет связи между вершинами сетки и **сглаживание**, которое переставляет вершины сетки. Оптимизация может быть или включена или выключена. Сглаживание управляется числом в диапазоне  $0 \div 5$ . Большее число даёт большее сглаживание. Высокий уровень сглаживания будет размазывать переходы в размере сетки. Можно разделить процессы оптимизации поверхностной и объёмной сеток. В большинстве случаев, когда нет необходимости в их использовании, эти функции можно отключать. Это ускорит процесс генерации сетки.

**Сохранение поверхностной сетки при оптимизации объёмной** позволяет оптимизировать объёмную сетку, не изменяя полученную на первом этапе генерации поверхностную сетку. В противном случае сетка на поверхности может быть изменена оптимизацией. Эта возможность полезна в тех случаях, когда пользователь хочет сохранить на поверхности детали структуру сетки, которую он получил в результате подбора параметров сетки, но при этом всё же хочет оптимизировать объёмную сетку.

**Подавить мелкие элементы.** Включение этого флажка указывает системе, мелкие элементы модели (ребра или грани) какого относительного или абсолютного размера можно игнорировать при расчёте сетки. Эту возможность нужно применять в ситуациях, когда модель имеет такие очень мелкие топологические элементы, наличие которых сильно замедляет или даже делает невозможным расчёт правильной, достаточной для целей Анализа сетки.

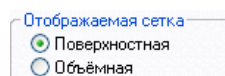
**Обработка мелких деталей.** В автоматическом генераторе сетки предусмотрен специальный алгоритм для улучшенной обработки мелких, но существенных для модели деталей. При включении

этого режима нужно также указать максимальные относительные или абсолютные размеры элементов, обрабатываемых данным алгоритмом.

**Минимальный угол треугольника** определяет приемлемый диапазон для значений углов между рёбрами элемента сетки (тетраэдра). Максимальный угол треугольника вычисляется автоматически ( $180^\circ - a_{\min}$ ). Следует отметить при этом, что из-за других факторов всё еще могут быть получены углы вне этого диапазона.

**Максимальное число элементов.** Этот параметр устанавливает ограничение на общее количество элементов сетки. Эта функция существует для того, чтобы предотвратить случайное создание слишком большого количества узлов сетки, что может существенно замедлить как генерацию самой сетки, так и последующий расчёт. Если при генерации сетки полученное число элементов превышает заданный лимит, то система выдаёт соответствующее сообщение и прекращает генерацию сетки. В этом случае для получения сетки с заданным количеством элементов следует задать более грубые рамки.

На закладке «**Изображение**» можно установить тип изображения для рассчитанной сетки. **Поверхностная** сетка позволяет оценить большинство основных качеств полученной сетки. При этом не показана часть сетки, уходящая вглубь модели, благодаря чему система может быстро работать при вращении 3D сцены.



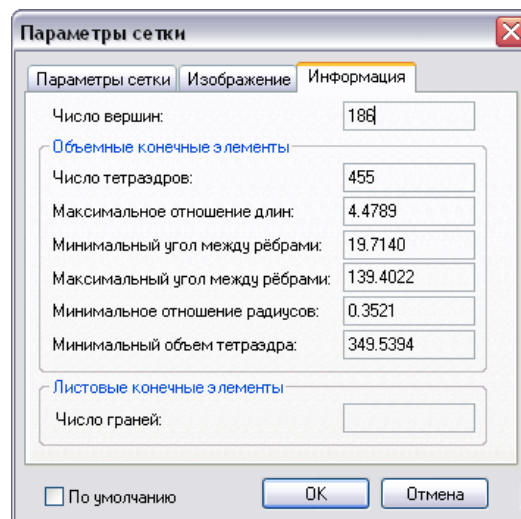
Изображение объёмной сетки показывает всю сетку, в том числе и её часть, попадающую внутрь модели. В этом режиме система может медленно работать при вращении 3D сцены. В этом случае наиболее оптимальный режим 3D сцены – рёберное изображение.

На закладке «**Информация**» можно получить информацию о некоторых свойствах полученной сетки: общее число вершин, число конечных элементов и др. Все эти параметры позволяют оценить качество результата генерации сетки. Отдельного пояснения требуют некоторые параметры:

**Максимальное отношение длин** характеризует элемент сетки, у которого значение отношения длинного и короткого ребра максимально.

**Максимальный/минимальный угол между рёбрами.** Показывает фактически полученный максимальный и минимальный углы между ребрами элементов сетки.

**Минимальное отношение радиусов.** Показывает наименьшее значение отношения радиуса вписанной сферы к радиусу описанной сферы одного тетраэдра.



## Задание ограничений

В качестве места для определения ограничения может быть грань, ребро или вершина используемого тела. В системе можно задать три типа ограничений: **полное закрепление**, **частичное закрепление** и **контакт**. Ограничение добавляется в активную задачу и может быть соотнесено только с элементами того тела, которое используется в активной задаче. Во избежание сбоя расчёта для модели необходимо создать достаточное количество ограничений, например, одно полное закрепление.

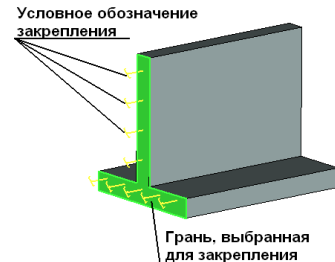
## Полное закрепление

Данный вид граничных условий блокирует все степени свободы для выбранного объекта. Полностью закрепить можно грань, ребро или вершину модели.

Для задания полного закрепления используется команда:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<b>&lt;ЗМС&gt;</b>	<b>«Анализ Закрепление Полное закрепление»</b>	

Для задания закрепления нужно выбрать элемент модели. Для выбора доступны грани, рёбра или вершины. После выбора элемента в 3D окне появляется условное обозначение полного закрепления.



## Частичное закрепление

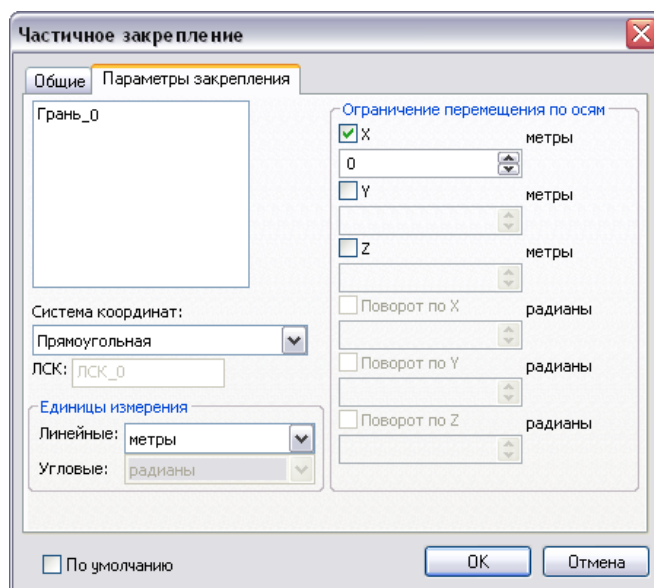
При задании частичного закрепления пользователю предоставляется возможность самостоятельно установить ограничения на различные степени свободы. При использовании только частичных закреплений в большинстве случаев для осуществления моделирования нужно обеспечить достаточное количество ограничений для предотвращения движения тела как жесткого целого.

Для задания частичного закрепления используется команда:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<b>&lt;ЗМЛ&gt;</b>	<b>«Анализ Ограничения Частичное закрепление»</b>	

Для задания места частичного закрепления нужно выбрать ребро, грань или вершину. Далее требуется определить ограничения по степеням свободы. Пользователь может работать в одной из трёх систем координат – Прямоугольной, Цилиндрической или Сферической. Для привязки системы координат к модели используется локальная система координат. Необходимо заметить, что в том случае если пользователем не определена локальная система координат, частичные закрепления будут заданы относительно глобальной системы координат.

В каждой системе координат можно ограничить перемещения по трем степеням свободы. Активный элемент управления относительно соответствующей степени свободы выбранной системы координат означает, что по данному направлению задаётся полное ограничение перемещения (если значение равно 0) или указано известное перемещение (если значение в соответствующем текстовом поле отлично от нуля). Отсутствие флага означает, что по данной степени свободы ограничение не предусмотрено. По умолчанию ограничены любые перемещения по всем трем направлениям. При необходимости можно снять существующие блокировки или добавить новые.

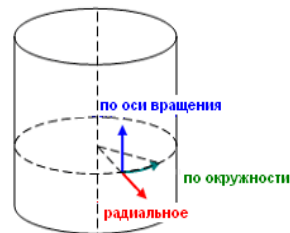
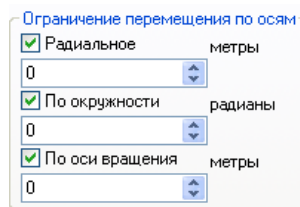


Параметры «Поворот по X», «Поворот по Y», «Поворот по Z» необходимы для того, чтобы задать повороты относительно осей системы координат (локальной или глобальной) при решении задач о нагружении пластины (или оболочки). При этом для дискретизации расчётной области должны быть использованы треугольные конечные элементы.

Если значение поворота равно 0, это означает, что по данному направлению задаётся полное ограничение поворота. Если значение поворота не равно 0, то указан известный поворот. Отсутствие флага (опция выключена) означает, что относительно данной оси ограничение поворота не предусмотрено. По умолчанию ограничения поворотов относительно осей выбранной системы координат отсутствуют.

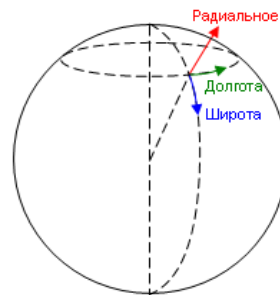
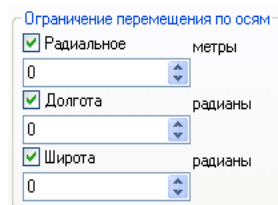
В цилиндрической системе координат существует возможность ограничивать перемещения по:

- радиусу;
- окружности;
- оси вращения.



В сферической системе координат существует возможность ограничивать перемещения по:

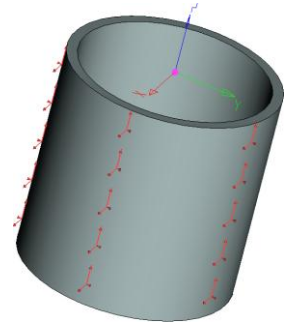
- радиусу;
- долготе;
- широте.



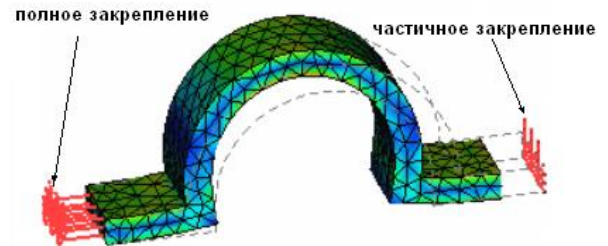


На рисунке представлен пример частичного закрепления поверхности в цилиндрической системе координат. В данном случае частичные закрепления определены в направлении «по окружности», а в радиальном направлении и по оси вращения не наложено никаких ограничений, т.е. для изображенного тела исключается поворот вокруг его оси. Условное изображение данных закреплений отображается с помощью специальных значков, ориентированных в соответствующих направлениях.

Система координат:  
 Цилиндрическая  
 ЛСК: ЛСК\_0  
 Ограничение перемещения по осям:  
☐ Радиальное метры  
☒ По окружности радианы  
 0  
☐ По оси вращения метры




Команда «Частичное закрепление» обладает ещё одним полезным функционалом. Пользователь может задать для конструкции известное значение перемещения, например, известную предварительную деформацию конструкции. Для этого в окне свойств команды «Частичное закрепление» необходимо указать значение фиксированного перемещения элемента модели по какой-либо из координатных осей. Статический анализ будет выполнен с учётом этого условия.



Отметим, что в этом случае возможно осуществление статического расчёта без наложения дополнительных (силовых) нагрузений. Таким образом, можно оценить напряжения, возникающие в деформированной конструкции, если известны количественные значения этих деформаций (перемещений).

**Типичный порядок действий при задании частичных закреплений:**

1. Инициировать команду «Частичные закрепления» .
2. Выбрать элемент для закрепления.
3. Выбрать систему координат.
4. Отметить необходимые ограничений перемещений по осям и задать их значения.
5. Завершить команду.

**Контакт**

Необходимость использования контактных ограничений возникает в задачах соприкасающихся тел. Для задания контакта используется команда:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<ЗМГ>	«Анализ Ограничения Контакт»	

Для задания контакта необходимо выбрать контактирующие грани двух тел.

Далее устанавливается один из четырех типов контакта:

- Жесткая связь
- Нет контакта
- Касание
- Жесткая стенка

Тип контакта «жесткая связь» используется в случае, когда необходимо скрепить контактирующие поверхности тел. Тела в этом случае рассматриваются как связанные, перемещения грани одного тела без каких либо ограничений передаются граням другого тела. Если тела состоят из материалов с разными физическими характеристиками, конечно-элементная модель учитывает различные свойства материалов, принадлежащих различным граням контактирующих тел.

Если на область контакта не должно накладываться никаких ограничений, то следует использовать тип «нет контакта». В данном случае контактирующие поверхности могут свободно перемещаться друг относительно друга. Поэтому, используя этот контакт, необходимо следить за тем, чтобы в процессе нагружения соприкасающиеся грани не пересекались.

Контакт «касание» отличается от «нет контакта» тем, что запрещает взаимопenetрование соприкасающихся граней. Данный тип контакта позволяет моделировать такие физические явления, как скольжение одного тела по другому, появление зазоров в местах соединения деталей, вследствие их деформаций, и т.п. Отметим, что использование контакта «касание», предполагает наличие физического контакта граней тел в исходном состоянии анализируемой конструкции.

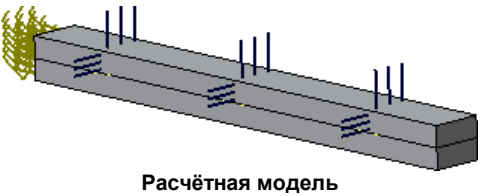
«Жесткая стенка» используется для моделирования соприкосновения тела с жесткой поверхностью, деформацией которой в целях моделирования можно пренебречь. Здесь необходимо задание только граней первого тела, которые контактируют с жесткой стенкой.

Существует возможность задавать контакты по умолчанию:

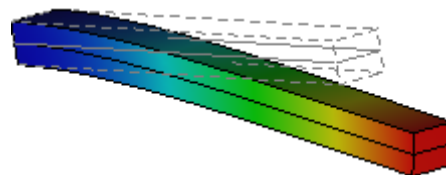
Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<ЗМК>	«Анализ Ограничения Параметры контакта по умолчанию»	

Данная команда определяет тип контакта, используемый по умолчанию. Это позволяет глобально определить параметры контакта для всех соприкасающихся тел. Например, если рассчитывается составная конструкция, состоящая из нескольких деталей, соединенных жестко, задание контакта по умолчанию «**жесткая связь**» избавляет от необходимости определять вручную тип контакта для всех соприкасающихся поверхностей. Параметры контакта по умолчанию можно переопределить, используя команду «**Контакт**».

Поведение модели в зависимости от различных типов контакта можно проиллюстрировать на следующем примере. Две балки соединены контактными ограничениями, один торец закреплён, а на боковую и верхнюю поверхности первой балки действует распределенная сила по нормали.

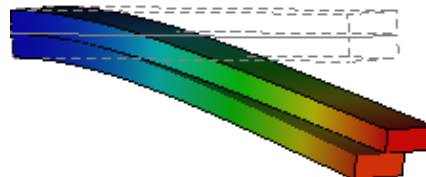


Если в качестве контакта используется «**жесткая связь**», то составная балка деформируется как жесткое целое.



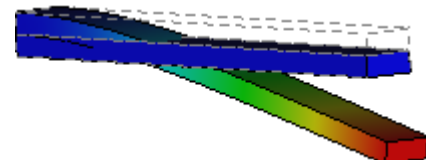
Тип контакта «жесткая связь»

В случае, когда используется контакт «**касание**», видно, что верхняя балка деформирует нижнюю и проскальзывает вдоль нее.



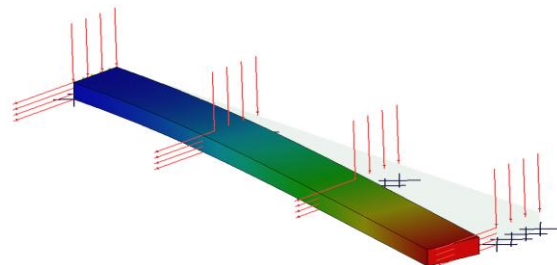
Тип контакта «касание»

При использовании «**нет контакта**» наблюдается проникновение верхней балки в нижнюю, чего следует избегать при проектировании сборочных моделей.




Тип контакта «нет контакта»

Тип контакта «**жесткая стенка**» позволяет определить грани тела, задающие в пространстве поверхности, за которые тело не может проникать (виртуальная абсолютно жесткая стенка).



**Типичный порядок действий при задании контактных ограничений:**


1. Инициировать команду «Контакт» .
2. Выбрать контактные грани первого тела.
3. Выбрать контактные грани второго тела.
4. Задать тип контакта.
5. Завершить команду.

## Упругое основание


Данный вид ограничения позволяет определить упругое взаимодействие на границе тела. Упругое основание используется для моделирования соприкосновения тела с внешней упругой средой, которая деформируется вместе с телом. Например, станина станка деформируются вместе с основанием, базирующим на упругих демпфирующих элементах (виброизоляторах). Также примером тела, связанного с упругой средой, может служить плотина, опирающаяся на грунт, рельсовый путь и т.д.

Математически упругое основание рассматривается как множество невесомых пружин одинаковой жесткости приложенных на границе тела.

Для задания упругого основания используется команда:



Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<M3S>	«Анализ Закрепление Упругое основание»	

После вызова команды необходимо выбрать элементы модели для приложения нагрузки. С помощью автоменю нужно выбрать элемент модели:

	<E>	Выбрать элемент для закрепления
---	-----	---------------------------------

Для выбора доступны грани, рёбра или вершины. После выбора элемента в 3D окне появляется его условное обозначение.

Для выбора локальной системы, в которой будут определены коэффициенты жесткости, используйте опции:

	<C>	Выбрать систему координат
	<K>	Отменить выбор системы координат

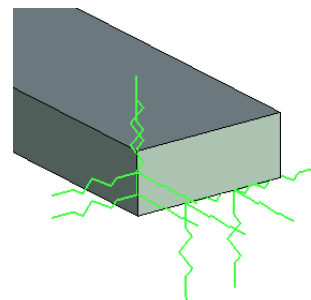
Если не задана локальная система координат, то по умолчанию используется глобальная система.

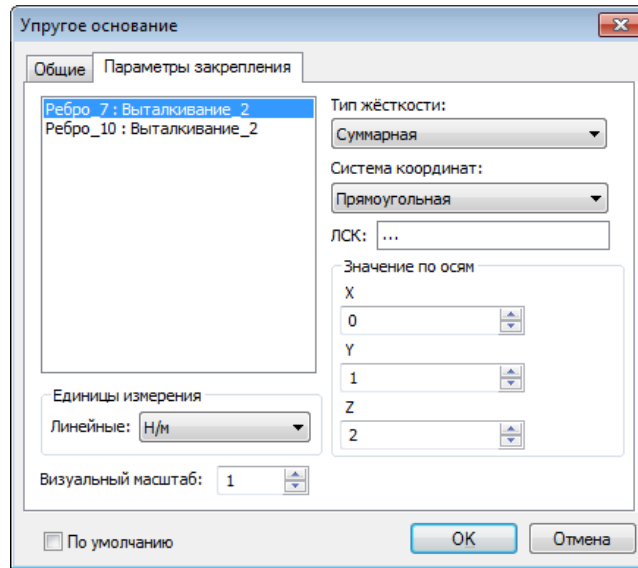
В окне свойств задайте:

- Тип системы координат: прямоугольная, цилиндрическая, сферическая.
- Тип жесткости: суммарная или распределенная.
- Значения по осям (по умолчанию стоит 1 Н/м).
- Единицы измерения: Н/м, фунт-сила/дюйм, кгс/см.


Тип жесткости «суммарная» используется, если известна общая жесткость воздействующей среды и эта величина равномерно распределяется по суммарной площади граней/ суммарной длине ребер/ суммарному количеству вершин (по одному или каждому из направлений).

Тип жесткости «распределенная» используется, если известна удельная жесткость основания на единицу площади (по одному или каждому из направлений).





Типичный порядок действий при задании ограничения типа упругое основание:

1. Инициировать команду «Упругое основание» .
2. Выбрать грани, ребра, вершины.
3. Выбрать систему координат и указать ее тип.
4. Задать значения коэффициентов жесткости по осям и единицы измерения.
5. Завершить команду.

## Задание нагрузок


### Механические нагрузки

Этот тип нагрузок применяется при моделировании задач линейного и нелинейного статического анализа прочности конструкции (*Статический Анализ*), при расчёте величин критических нагрузок потери устойчивости и соответствующих им форм конструкции (*Анализ Устойчивости*), а также – при моделировании расчёта с учётом усталости при циклическом нагружении.


### Сила

*Сила* представляет собой вид нагружения, применяющийся для задания *сосредоточенной нагрузки*, а также для задания *суммарной величины* распределённой нагрузки.

Для задания нагрузки *Сила* используйте команду:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<3MF>	«Анализ Нагружение Сила»	

После вызова команды необходимо выбрать элементы модели для приложения нагрузки. При помощи опции автоменю:

	<E>	Выбрать элемент для нагружения
---	-----	--------------------------------

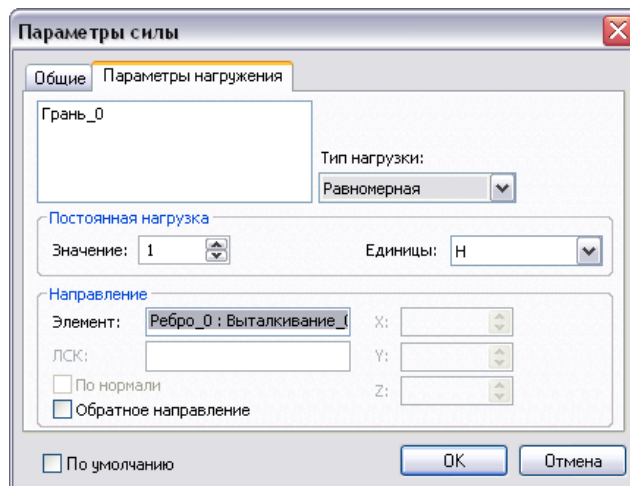
выберите грани, рёбра или вершины рассчитываемой модели. Выбранные элементы будут добавлены в список.

Так как при помощи *Силы* можно задать суммарную величину погонной (поверхностной) нагрузки, то необходимо определить, каким образом эта величина будет распределена по длине ребра (по площади грани). В окне свойств необходимо задать тип нагрузки:

- равномерная;
- неравномерная.

### Сила как суммарная величина равномерно распределённой нагрузки

При определении *Силы* как суммарной величины равномерно распределённой нагрузки необходимо задать числовое значение, единицы измерения и направление её действия.



**Числовое значение.** Под числовым значением будем понимать суммарную величину равномерно распределённой по длине ребра (по площади грани) нагрузки.

При равномерном распределении *Силы* на единицу длины ребра (на единицу площади грани) приходится величина, равная отношению заданной величины нагрузки к длине ребра (к площади грани).

Следует также заметить, что если величина нагружения задаётся одновременно для нескольких элементов (допускается выбор элементов только одного типа: вершин, рёбер или граней), то её значение будет распределено между ними следующим образом:

- На единицу площади каждой грани будет приходиться величина нагружения, равная отношению заданной величины нагрузки к суммарной площади граней;
- На единицу длины каждого ребра - величина, равная отношению заданной величины нагрузки к суммарной длине рёбер;
- В каждую вершину будет прикладываться часть силы, равная  $1/n$ , где  $n$  - число вершин.

**Единицы измерения.** Для нагрузки *Сила* могут быть установлены следующие единицы измерения: Н, ФС, КГС.

**Направление действия нагрузки.** В качестве направления действия *Силы*, можно выбрать нормаль к нагружаемой грани, элемент 3D модели или некоторый радиус-вектор, заданный в выбранной пользователем локальной системе координат (если локальная система координат не задана, то, по умолчанию, будет использоваться глобальная система координат).

Для работы с локальной системой координат используйте опции:

	<b>&lt;C&gt;</b>	Выбрать систему координат
	<b>&lt;K&gt;</b>	Отменить выбор системы координат

Для задания направления действия силы при помощи объекта 3D модели используйте опцию автоменю:

	<b>&lt;D&gt;</b>	Выбрать направление
--	------------------	---------------------

Для отмены выбора направления используйте опцию:

	<b>&lt;U&gt;</b>	Отменить выбор направления
--	------------------	----------------------------

Для быстрой смены направления действия *Силы* на противоположное можно установить флажок «Обратное направление».

### **Сила как суммарная величина неравномерно распределённой нагрузки**

При определении *Силы* как суммарной величины неравномерно распределённой нагрузки кроме числового значения, единиц измерения и направления её действия необходимо задать качественный закон распределения, в соответствии с которым заданная величина нагружения будет распределена по площади грани.

**Числовое значение.** Под числовым значением будем понимать суммарную величину неравномерно распределённой по площади грани нагрузки.

**Единицы измерения.** Для нагрузки *Сила* могут быть установлены следующие единицы измерения: Н, ФС, КГС.

**Параметры силы**

Общие | Параметры нагружения

Грань\_0

Тип нагрузки: Неравномерная

**Распределение**

Суммарная сила: 1

Значение: 5

Колонок: 2

Строк: 2

Интерполяция: Сплайн

Единицы: Н

5	4
3	2

Экспорт...

Импорт...

Визуальный масштаб: 1

**Направление**

Элемент:

ЛСК:

☒ По нормали

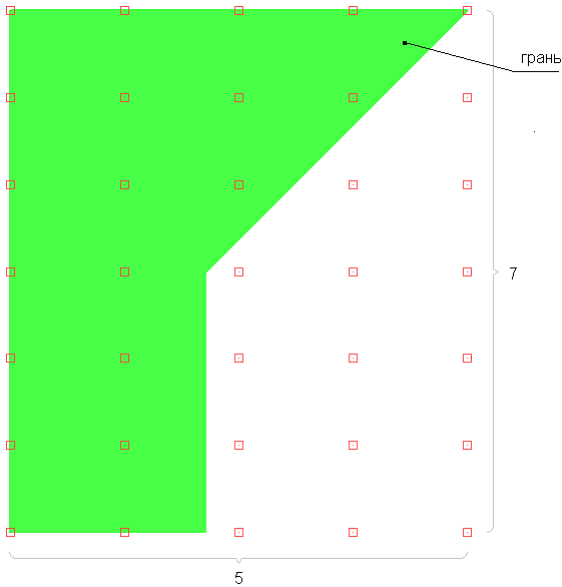
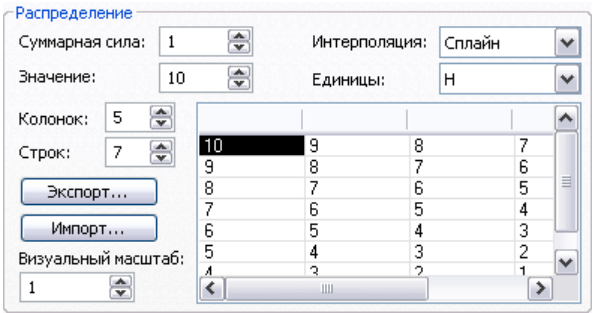
☐ Обратное направление

☐ По умолчанию

OK Отмена



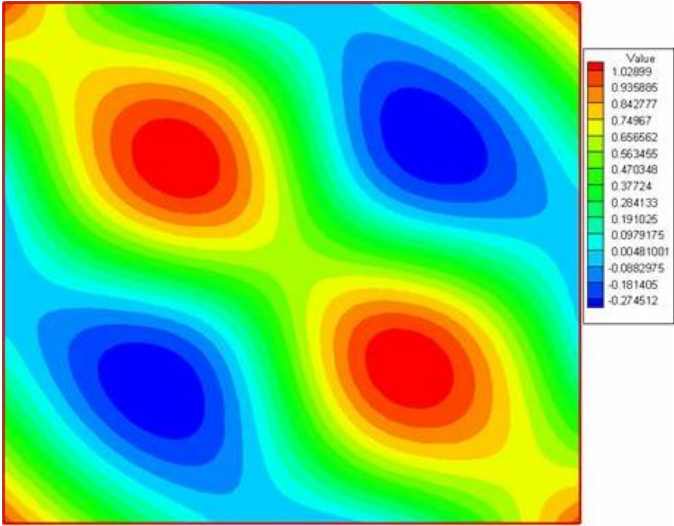
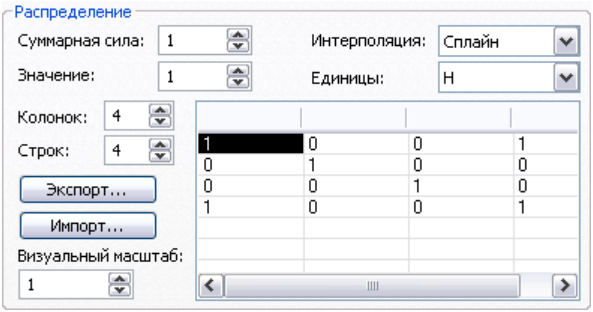
**Закон распределения.** На прямоугольнике, описывающем грань, выбранную в качестве места приложения неравномерной нагрузки, строится равномерная сетка узлов. Густота сетки определяется числом строк и столбцов таблицы распределения. В ячейках таблицы указывается значение функции в соответствующем узле сетки.



Пример задания закона распределения неравномерной нагрузки

**Интерполяция.** Поскольку значения функции распределения известны только в узлах сетки (т.е. заданы таблицей), необходимо восстановить данную функцию для любой точки грани. В T-FLEX Анализ применяется два способа восстановления функции по известным значениям: линейная интерполяция (строится линейная зависимость между значениями в узлах сетки) и построение сплайна.

На рисунках приведены примеры функции распределения неравномерной нагрузки, полученной при помощи линейной интерполяции и построения сплайна.



Пример функции распределения неравномерной нагрузки, полученной построением сплайна

Распределение

Суммарная сила: 1 Интерполяция: Линейная

Значение: 1 Единицы: Н

Колонки: 4

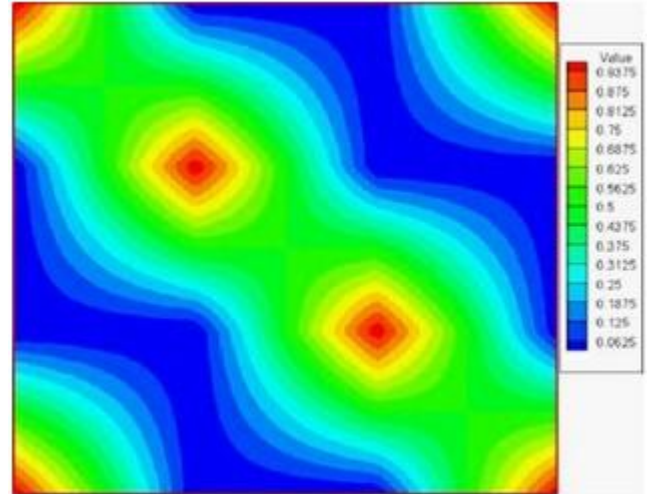
Строки: 4

Экспорт...

Импорт...

Визуальный масштаб: 1

1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	0
1	0	0	1



Пример функции распределения неравномерной нагрузки, полученной при помощи линейной интерполяции

**Направление действия нагрузки.** В качестве направления действия *Силы*, можно выбрать нормаль к нагружаемой грани, элемент 3D модели или некоторый радиус-вектор, заданный в выбранной пользователем локальной системе координат (если локальная система координат не задана, то, по умолчанию, будет использоваться глобальная система координат).

Для работы с локальной системой координат используйте опции:

	<C>	Выбрать систему координат
	<K>	Отменить выбор системы координат

Для задания направления действия силы при помощи объекта 3D модели используйте опцию автоменю:

	<D>	Выбрать направление
--	-----	---------------------

Для отмены выбора направления используйте опцию:

	<U>	Отменить выбор направления
--	-----	----------------------------

Для быстрой смены направления действия *Силы* на противоположное можно установить флажок «Обратное направление».

## Изгибающие моменты

В диалоге «Параметры силы» помимо параметров, задающих тип нагрузки, числовое значение, единицы измерения, направление действия нагрузки и т.д., присутствует группа параметров «Момент».

**Параметры силы**

Общие | Параметры нагружения

Грань\_0 : Выталкивание\_0

Тип нагрузки: Равномерная

**Постоянная нагрузка**

Значение: 1 Единицы: Н

**Направление**

Элемент: X: 1  
ЛСК: ЛСК\_0 Y: 0  
☐ По нормали Z: 0  
☐ Обратное направление

**Момент**

☐ Момент по X Н-м  
☒ Момент по Y Н-м  
1 Единицы: Н-м  
☒ Момент по Z Н-м

☐ По умолчанию

OK Отмена

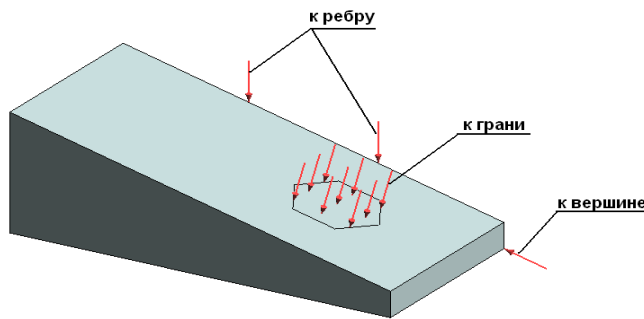
При помощи данной группы параметров можно задать изгибающие моменты относительно осей системы координат (локальной или глобальной) при решении задач о нагружении пластин (или оболочек). Необходимо заметить, что дискретизация расчётной области выполнена треугольными конечными элементами.

Для *Момент*а могут быть установлены следующие единицы измерения: Н-м, ФС-дюйм, КГС-см.

В 3D сцене нагрузка «Сила» изображается в виде стрелок. Стрелки показывают направление действия нагрузки.


Во многих случаях распределённая нагрузка должна быть приложена не на всю грань или ребро модели, а на какую-то определённую часть этой грани или ребра, соответствующую области передачи внешнего воздействия.

Для того чтобы приложить воздействие на часть грани, необходимо сначала создать на грани геометрию нужной формы, а затем воспользоваться командой **«Операции|Грани| Разделение граней»**.



Задание нагрузки «Сила»


**Типичный порядок действий при задании нагрузки «Сила»:**

1. Инициировать команду «Сила» .
2. Выбрать грань, ребро, вершину, узел или последовательность элементов.
3. Задать величину нагрузки.
4. Задать единицы измерения.
5. Выбрать тип нагрузки: равномерная или неравномерная
6. Для неравномерной нагрузки задать качественный закон распределения
7. Задать направление действия нагрузки
8. Завершить команду.


**Давление**

*Давление* представляет собой вид нагружения, применяющийся для задания распределённой нагрузки.

Для задания нагрузки *Давление* используйте команду:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<ЗМС>	«Анализ Нагружение Давление»	

После вызова команды необходимо выбрать элементы модели для приложения нагрузки. При помощи опции автоменю:

	<Е>	Выбрать элемент для нагружения
---	-----	--------------------------------

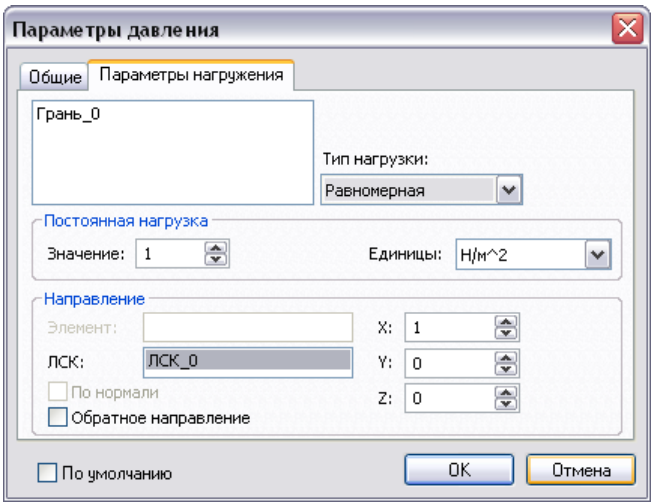
выберите грань или ребро рассчитываемой модели. Выбранные элементы будут добавлены в список.

Так как при помощи *Давления* можно задать распределённую нагрузку, то необходимо определить характер этого распределения по длине ребра или по площади грани. В окне свойств задайте тип нагрузки:

- равномерная;
- неравномерная;
- гидростатическая.

**Давление как равномерно распределённая нагрузка**

При определении *Давления* как равномерно распределённой нагрузки необходимо задать числовое значение, единицы измерения и направление её действия.



**Числовое значение.** Под числовым значением будем понимать величину нагружения, приходящуюся на единицу площади грани или на единицу длины ребра.

**Единицы измерения.** Для нагрузки *Давление*, приложенной к грани, могут быть установлены следующие единицы измерения: Н/м<sup>2</sup>, ФС/Дюйм<sup>2</sup>, КГС/см<sup>2</sup>.

Для нагрузки *Давление*, заданной на ребро, могут быть установлены следующие единицы измерения: Н/м, ФС/Дюйм, КГС/см.

**Направление действия нагрузки.** В качестве направления действия *Давления*, можно выбрать нормаль к нагружаемой грани, элемент 3D модели или некоторый радиус-вектор, заданный в выбранной пользователем локальной системе координат (если локальная система координат не задана, то, по умолчанию, будет использоваться глобальная система координат). По умолчанию, в локальной системе координат направление действия нагрузки задано вдоль оси X.

Для работы с локальной системой координат используйте опции:

	<C>	Выбрать систему координат
	<K>	Отменить выбор системы координат

Для задания направления действия нагрузки *Давление* при помощи объекта 3D модели используйте опцию автоменю:

	<D>	Выбрать направление
--	-----	---------------------

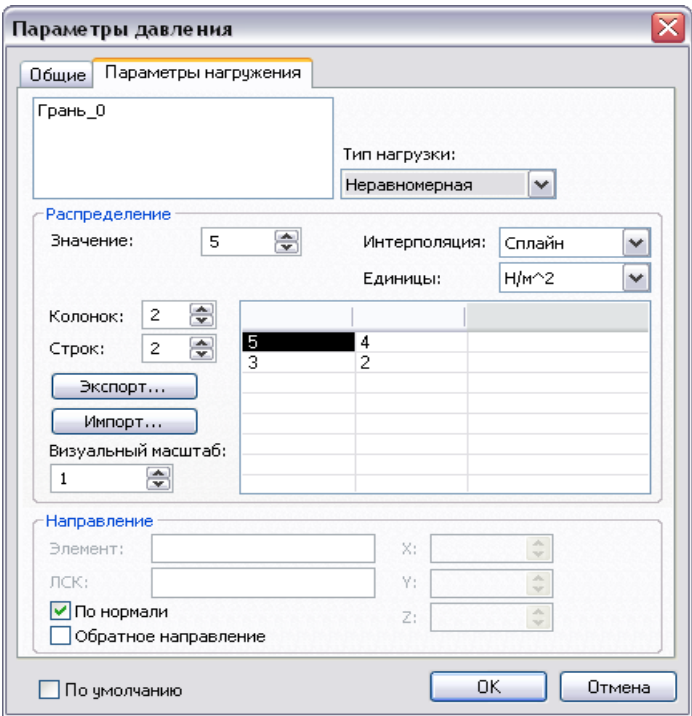
Для отмены выбора направления используйте опцию:

	<U>	Отменить выбор направления
--	-----	----------------------------

Для быстрой смены направления действия нагрузки на противоположное можно установить флажок «Обратное направление».

**Давление как неравномерно распределённая нагрузка**

При определении *Давления* как неравномерной нагрузки необходимо задать единицы измерения, направление её действия и закон распределения, в соответствии с которым данная нагрузка будет определена в каждой точке грани.



**Закон распределения.** На прямоугольнике, описывающем грань, выбранную в качестве места приложения неравномерной нагрузки, строится равномерная сетка узлов. Густота сетки определяется числом строк и столбцов таблицы распределения. В ячейках таблицы указывается значение функции в соответствующем узле сетки.

**Интерполяция.** Поскольку значения функции распределения известны только в узлах сетки (т.е. заданы таблицей), необходимо восстановить данную функцию для любой точки грани. В T-FLEX Анализ применяется два способа восстановления функции по известным значениям: билинейная интерполяция (строится линейная зависимость между значениями в узлах сетки) и построение сплайна.

**Единицы измерения.** Для нагрузки *Давление*, приложенной к грани, могут быть установлены следующие единицы измерения: Н/м<sup>2</sup>, ФС/Дюйм<sup>2</sup>, КГС/см<sup>2</sup>.

**Направление действия нагрузки.** В качестве направления действия *Давления*, можно выбрать нормаль к нагружаемой грани, элемент 3D модели или некоторый радиус-вектор, заданный в выбранной пользователем локальной системе координат (если локальная система координат не задана, то, по умолчанию, будет использоваться глобальная система координат). По умолчанию, в локальной системе координат направление действия нагрузки задано вдоль оси X.


Для работы с локальной системой координат используйте опции:

	<C>	Выбрать систему координат
	<K>	Отменить выбор системы координат

Для задания направления действия нагрузки *Давление* при помощи объекта 3D модели используйте опцию автоменю:

	<D>	Выбрать направление
--	-----	---------------------

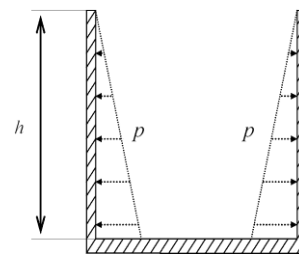
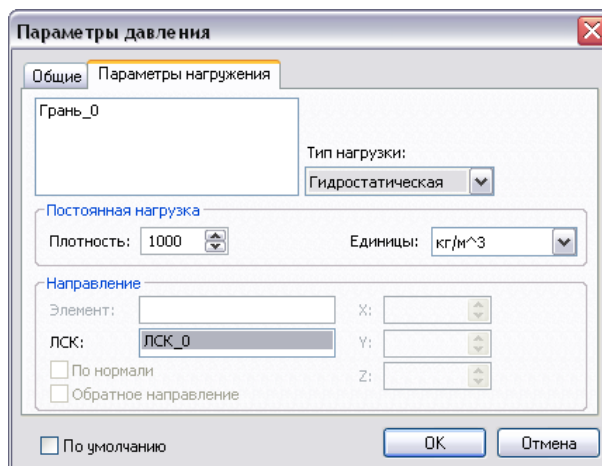
Для отмены выбора направления используйте опцию:

	<U>	Отменить выбор направления
---	-----	----------------------------

Для быстрой смены направления действия нагрузки на противоположное можно установить флажок «Обратное направление».

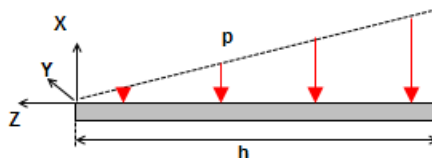
## Гидростатическое давление

- ☐ Гидростатическое давление (или давление жидкости) является частным случаем неравномерно распределённой нагрузки *Давление*. Примером такой нагрузки может служить давление жидкости на стенки сосуда, изменяющееся с высотой по закону  $p = \rho \cdot h$ , где  $h$  - высота столба жидкости плотностью  $\rho$ .
- ☐ При определении *Давления* как гидростатической нагрузки необходимо задать плотность жидкости, единицы измерения и определить направление изменения нагрузки.



**Направление изменения нагрузки.** Нагрузка *Гидростатическое давление* действует по нормали к нагружаемой грани. Необходимо задать направление изменения нагрузки, то есть направление, в котором действие нагрузки увеличивается.

Для того чтобы задать направление изменения нагрузки, необходимо выбрать локальную систему координат. Направление изменения (увеличения) нагрузки будет определяться направлением, противоположным направлению оси Z выбранной системы координат:

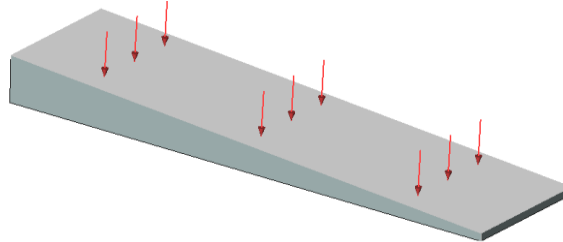


Нулевое значение нагрузки, соответствующее верхнему уровню жидкости, совпадает в пространстве с координатой  $Z=0$  локальной системы координат, определяющей направление изменения нагрузки.

Для работы с локальной системой координат используйте опции:


	<b>&lt;C&gt;</b>	Выбрать систему координат
	<b>&lt;K&gt;</b>	Отменить выбор системы координат

В 3D сцене нагрузка *Давление* отображается следующим образом:



**Задание нагрузки «Давление»**

**Типичный порядок действий при задании нагрузки *Давление*:**

1. Инициировать команду «Давление» .
2. Выбрать грань, ребро или последовательность элементов.
3. Выбрать тип нагрузки: равномерная, неравномерная или гидростатическая.
4. Для равномерно распределённой нагрузки задать числовое значение.
5. Для неравномерной нагрузки задать закон распределения.
6. Для гидростатического давления задать плотность жидкости.
7. Задать единицы измерения.
8. Задать направление.
9. Завершить команду.



## Вращение

*Вращение* представляет собой вид нагружения, применяющийся для имитации центробежной силы, которая возникает при равномерном или равноускоренном вращении объекта.

Для задания нагрузки *Вращение* используйте команду:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<b>&lt;3MR&gt;</b>	<b>«Анализ Нагружение Вращение»</b>	

После вызова команды нужно выбрать одно или несколько тел для приложения нагрузки. При помощи опций автоменю:


	<b>&lt;B&gt;</b>	Выбрать тело
	<b>&lt;M&gt;</b>	Выбрать все тела

выберите тела рассчитываемой модели. Они будут добавлены в список.


Вращение всегда происходит относительно некоторой оси, поэтому её необходимо задать. В качестве оси вращения может выступать либо элемент 3D модели (ребро, ось цилиндрической грани и т.д.), либо специально построенная линия (например, 3D путь, построенный по двум 3D узлам), либо одна из осей локальной системы координат. Направление оси вращения определяет направление действия нагрузки (по правилу правого буравчика).



Для выбора оси вращения используйте опцию автоменю:

	<A>	Выбрать ось вращения
---	-----	----------------------

Отменить выбор оси вращения позволяет опция:

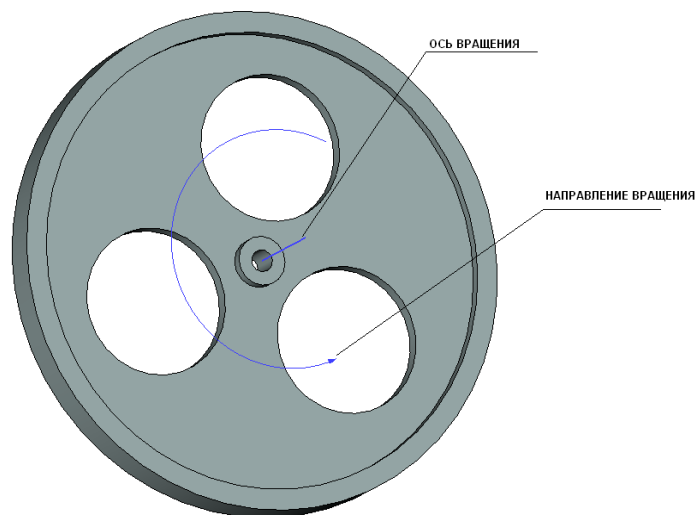
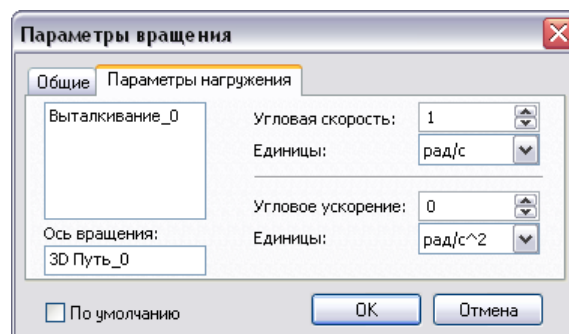
	<C>	Отменить выбор оси
---	-----	--------------------

В окне свойств нагрузки необходимо задать значения угловой скорости и углового ускорения.

Для угловой скорости могут быть установлены следующие единицы измерения: радиан в секунду [рад/с], градус в секунду [град/с], оборотов в секунду [Гц], оборотов в минуту [Об/мин].


Для углового ускорения задаются следующие единицы измерения: радиан в секунду<sup>2</sup> [рад/с<sup>2</sup>], градус в секунду<sup>2</sup> [град/с<sup>2</sup>], оборотов в секунду<sup>2</sup> [Гц/с], оборотов в минуту<sup>2</sup> [гpm<sup>2</sup>].

В 3D сцене нагрузка *Вращение* отображается следующим образом:



Задание вращательного движения


**Типичный порядок действий при задании нагрузки «Вращение»:**

1. Инициировать команду «Вращение» .
2. Задать ось вращения.
3. Задать значения и единицы измерения угловой скорости и углового ускорения в окне свойств команды.
4. Завершить команду.



## Ускорение

Ускорение создаёт равномерное воздействие на всякое тело, обладающее массой. Данное воздействие равномерно распределено по всему объёму выбранного тела. При помощи такого нагружения можно, например, имитировать нагрузку от собственного веса под действием силы тяжести.

Для задания нагрузки Ускорение используйте команду:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<ЗМА>	«Анализ Нагружение Ускорение»	

После вызова команды нужно выбрать тело (или несколько тел) для приложения нагрузки. При помощи опций автоменю:

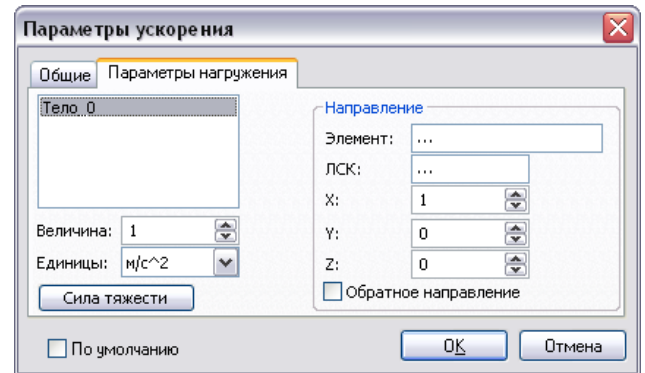
	<В>	Выбрать тело
	<М>	Выбрать все тела

выберите тела рассчитываемой модели. Они будут добавлены в список.



В окне свойств задайте:

- Величину нагрузки;
- Единицы измерения:  $\text{м/с}^2$ ,  $\text{см/с}^2$ ,  $\text{дюйм/с}^2$ ;
- Направление действия нагрузки.


**Направление действия нагрузки.** В качестве направления действия ускорения, можно выбрать элемент 3D модели или некоторый радиус-вектор, заданный в выбранной пользователем локальной системе координат (если локальная система координат не задана, то, по умолчанию, будет использоваться глобальная система координат). По умолчанию, в локальной системе координат направление действия нагрузки задано вдоль оси X.




Для работы с локальной системой координат используйте опции:

	<С>	Выбрать систему координат
	<К>	Отменить выбор системы координат

Для задания направления действия нагрузки Ускорение при помощи объекта 3D модели используйте опцию автоменю:

	<Д>	Выбрать направление
---	-----	---------------------

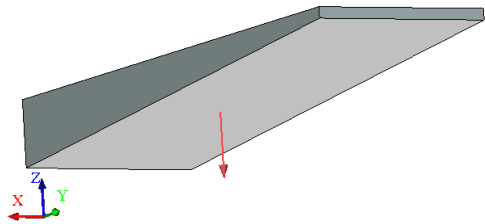
Для отмены выбора направления используйте опцию:

	<У>	Отменить выбор направления
---	-----	----------------------------

Для смены направления действия нагрузки на противоположное можно установить флажок «Обратное направление».


Для быстрого задания силы тяжести в окне свойств имеется кнопка [Сила тяжести], которая устанавливает значение ускорения  $\sim 9.81 \text{ м/с}^2$  и задаёт направление действия нагрузки вдоль оси Z глобальной системы координат, равное -1.

В 3D сцене нагрузка «Ускорение» отображается следующим образом:



Задание нагрузки «Ускорение»

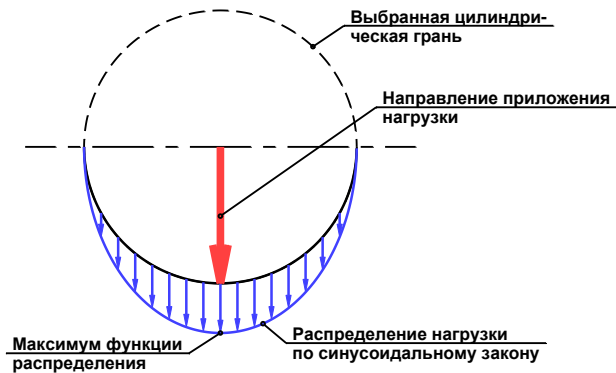
Типичный порядок действий при задании нагрузки *Ускорение*:

1. Инициировать команду «Ускорение» .
2. Задать величину нагрузки.
3. Задать направление действия нагрузки
4. Завершить команду.

Цилиндрическая нагрузка

*Цилиндрическая нагрузка* имитирует нагрузку, возникающую от направленного воздействия таких деталей, как ось, подшипник или вал.


В качестве места приложения нагрузки используется цилиндрическая грань. Заданная сила распределяется по синусоидальному закону (см. иллюстрацию).



Для задания *Цилиндрической нагрузки* используйте команду:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<ЗМВ>	«Анализ Нагружение Цилиндрическая нагрузка»	

После вызова команды необходимо выбрать элементы (цилиндрические грани) модели для приложения нагрузки. При помощи опции автоменю:

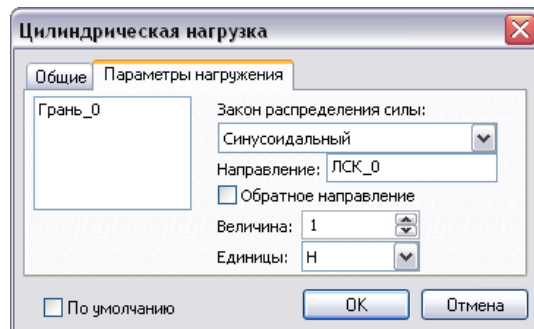
	<F>	Выбрать цилиндрическую грань
---	-----	------------------------------

выберите цилиндрическую грань рассчитываемой модели. Выбранный элемент будет добавлен в список.

В окне свойств задайте:

- Величину нагрузки;
- Единицы измерения: Н; КГС, ФС;
- Направление действия нагрузки.

**Направление действия нагрузки.** В качестве направления действия *Цилиндрической нагрузки*, можно выбрать элемент 3D модели или координатные оси системы координат.



Для задания направления действия *Цилиндрической нагрузки* при помощи объекта 3D модели используйте опцию автоменю:

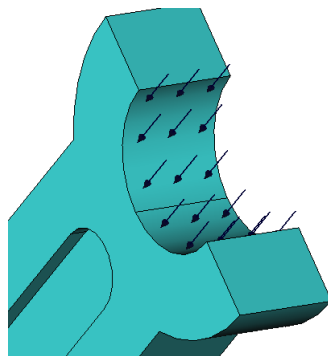
	<D>	Выбрать направление
--	-----	---------------------

Для отмены выбора направления используйте опцию:

	<U>	Отменить выбор направления
--	-----	----------------------------

Для смены направления действия нагрузки на противоположное можно установить флажок «Обратное направление».

В 3D сцене «Цилиндрическая нагрузка» отображается следующим образом:



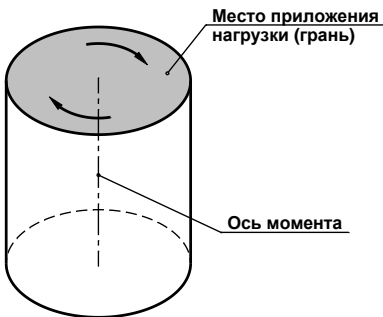
**Задание «Цилиндрической нагрузки»**

**Типичный порядок действий при задании *Цилиндрической нагрузки*:**

1. Инициировать команду «Цилиндрическая нагрузка»
2. Выбрать цилиндрическую грань или набор граней.
3. Задать величину нагрузки.
4. Задать направление действия нагрузки
5. Завершить команду.

## Крутящий момент

*Крутящий момент* представляет собой воздействие момента указанной величины, распределенное по указанной грани.



Для задания *Крутящего момента* используйте команду:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<ЗМ>	«Анализ Нагружение Крутящий момент»	

В качестве места приложения нагрузки используются грани. Для выбора граней используйте опцию автоменю:

	<F>	Выбрать грань
--	-----	---------------

Выбранные грани заносятся в список.

В окне свойств задайте:

- Величину нагрузки;
- Единицы измерения: Н-м, КГС-см, ФС-дюйм;
- Ось момента.

Направление оси момента (или оси вращения) определяет направление действия нагрузки (по правилу правого буравчика). В качестве оси вращения может выступать либо элемент 3D модели (ребро, ось цилиндрической грани и т.д.), либо специально построенная линия (например, 3D путь, построенный по двум 3D узлам), либо одна из осей локальной системы координат.

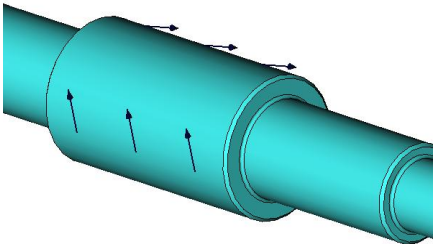
Для выбора оси вращения используйте опцию автоменю:

	<A>	Выбрать ось вращения
--	-----	----------------------

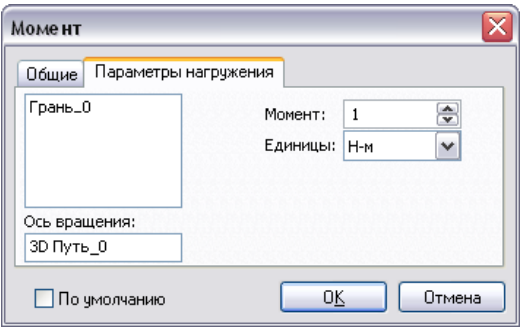
Отменить выбор оси вращения позволяет опция:

	<C>	Отменить выбор оси
--	-----	--------------------


В 3D сцене нагрузка «Крутящий момент» отображается следующим образом:



Задание нагрузки «Крутящий момент»



**Типичный порядок действий при задании нагрузки «Крутящий момент»:**

1. Инициировать команду «Крутящий момент» .
2. Выбрать нагружаемые грани тела.
3. Задать величину нагрузки
4. Задать ось момента.
5. Завершить команду.

Осциллятор

Осциллятор (кинематическая нагрузка) представляет собой вид нагружения, применяющегося для задания гармонического колебательного движения элемента конструкции, испытывающей вибрацию. Используется в задачах расчета вынужденных гармонических колебаний для задания **т.н. кинематического возбуждения колебаний**.

Для задания *нагрузки осциллятор* используйте команду:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<ЗМЗО>	«Анализ Нагружение Осциллятор»	

После вызова команды необходимо выбрать элементы модели для приложения нагрузки. При помощи опции автоменю:

	<E>	Выбрать элемент для кинематического нагружения
--	-----	--

выберите элементы рассчитываемой модели. Выбранный элемент будет добавлен в список.

При помощи опции автоменю:

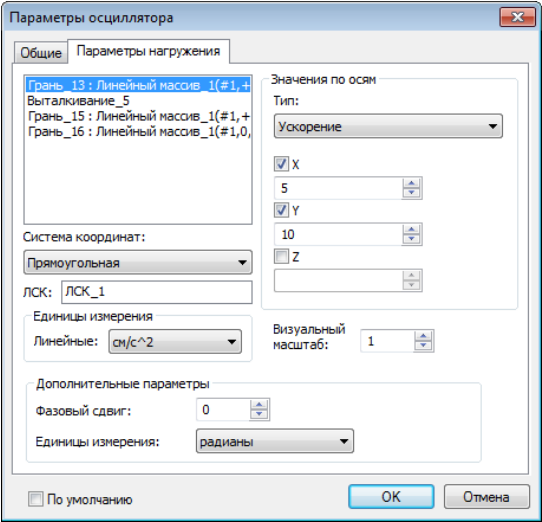
	<B>	Выбрать тело
	<M>	Выбрать все тела

выберите тела рассчитываемой модели. Они будут добавлены в список.

В окне свойств задайте:

- Тип значений нагрузки по осям;
- Величину и направление действия нагрузки;
- Единицы измерения для различных типов нагрузки: м, м/с, м/с<sup>2</sup>;
- Фазовый сдвиг, единицы измерения: град, рад.

**Значения по осям, тип.** Перед заданием значений кинематической нагрузки необходимо выбрать тип параметра, определяющего амплитуду колебания. Количественно амплитуда движения элемента конструкции может быть задана несколькими равнозначными способами через амплитуды: перемещений **Ошибка! Объект не может быть создан из кодов полей редактирования.**, мм, см, м, дюймы, футы; скорости  $\dot{U}_m = U_m \cdot \omega_f$ , мм/с, см/с, м/с, дюйм/с, фут/с;



ускорения  $\ddot{U}_m = U_m \cdot \omega_f^2$ , мм/с<sup>2</sup>, см/с<sup>2</sup>, м/с<sup>2</sup>, дюйм/с<sup>2</sup>, фут/с<sup>2</sup>;

перегрузки  $\ddot{U}_m / g = U_m \cdot \omega_f^2 / g$ , раз;



где  $\omega_f$  - частота вынужденных колебаний, рад/с; g - ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>.

Как видно, все величины, кроме амплитуды перемещения, являются вторичными и однозначно выражаются через амплитуду колебания и частоту вынужденного колебания.

Частота колебания задается в диалоге настроек расчета "Вынужденные гармонические колебания" непосредственно перед выполнением расчета.

**Величина и направление действия кинематической нагрузки.** В качестве направления действия нагрузки, можно выбрать некоторый радиус-вектор, заданный в выбранной пользователем локальной системе координат (если локальная система координат не задана, то, по умолчанию, будет использоваться глобальная система координат). Поставьте галочки напротив тех осей, вдоль которых будет задаваться величина составляющей нагрузки по данной оси.

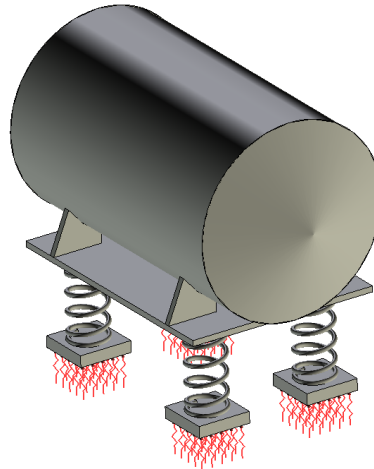
Для работы с локальной системой координат используйте опции:

	<b>&lt;C&gt;</b>	Выбрать систему координат
	<b>&lt;K&gt;</b>	Отменить выбор системы координат

Величины составляющих нагрузки, разложенной по осям системы координат, вводятся в поля, соответствующие отмеченным галочкой осям. По умолчанию вводятся значения с типом амплитуда перемещений, мм.


**Фазовый сдвиг** используется при наличии в задаче нескольких гармонических воздействий (силовых или кинематических) для задания запаздывания или опережения по фазе одной нагрузки относительно другой.

В 3D сцене нагрузка «Осциллятор» отображается следующим образом:



**Отображение нагрузки «Осциллятор»**

**Типичный порядок действий при задании нагрузки осциллятор:**

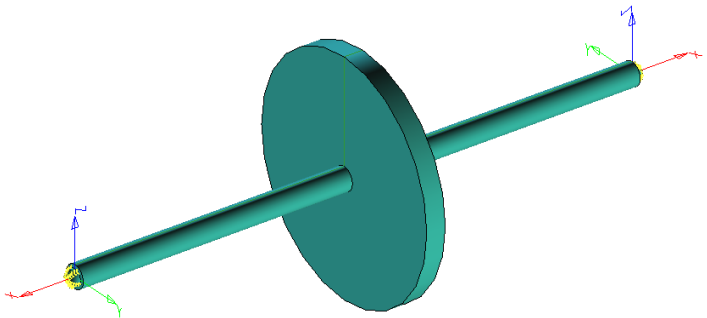
1. Инициировать команду «Осциллятор» .
2. Выбрать грани, ребра, вершины и/или тела; выбрать систему координат.



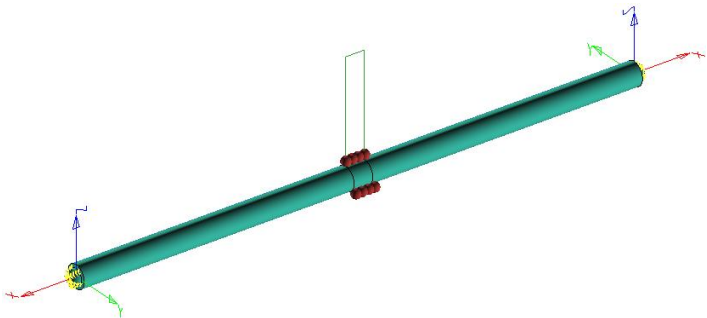
- 3. Задать значения и единицы измерения вибрационных амплитуд для компонентов перемещений, скорости или ускорения в окне свойств команды.
- 4. Задать фазовый сдвиг и единицы его измерения.
- 5. Завершить команду.

Дополнительная масса

*Дополнительная масса* представляет собой вид нагружения, применяющегося для задания дополнительной инерционной нагрузки от части конструкции, не включенной явно в задачу. В задачах статического анализа и анализа устойчивости применяется только совместно с нагрузкой «Ускорение». Используется в задачах статического анализа, анализа устойчивости, частотного анализа и анализа вынужденных колебаний.



Исходная полноразмерная модель



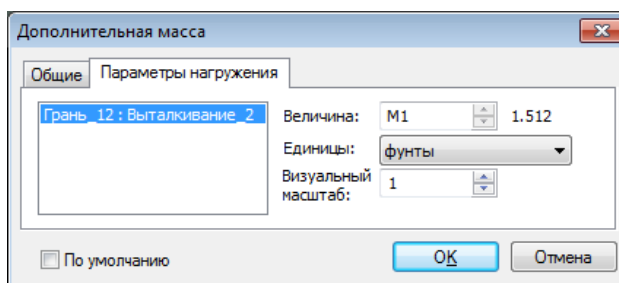
Замена диска "Дополнительной массой"

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<ЗМЗМ>	" Анализ Нагружение Дополнительная масса"	

После вызова команды необходимо выбрать элементы модели для приложения нагрузки. С помощью опции автоменю:

	<Е>	Выбрать элемент для нагружения
--	-----	--------------------------------

выберите грани, ребра или вершины рассчитываемой модели. Выбранные элементы будут  
выберите тела рассчитываемой модели. Они будут добавлены в список.




В окне свойств задайте:

- Величину нагрузки в кг; можно использовать переменные, в которые записан результат измерения массы какого-либо тела или операции.
- Единицы измерения: кг, фунты;

Следует иметь ввиду, что замена тела дополнительной массой, приложенной к тем же граням, по которым касалось заменяемое тело, хотя и упрощает конечно-элементную модель, вместе с тем не позволяет учесть пространственное распределение массы. Это обстоятельство нужно учитывать особенно в задачах частотного анализа, в которых пространственное распределение массы играет ключевую роль в формировании спектра собственных частот конструкции. Поэтому такая замена обычно допустима только для расчета первой (нижней) собственной частоты.

**Типичный порядок действий при задании нагрузки «Дополнительная масса»:**

1. Инициировать команду «Дополнительная масса» .
2. Выбрать грани, ребра, вершины
3. Задать значения и единицы измерения.
4. Завершить команду

## Тепловые нагрузки

Этот тип нагрузок используется в задачах теплообмена.

Теплообмен представляет собой процесс передачи тепла из области с более высокой температурой в область с более низкой температурой.

### Температура


*Температура* характеризует тепловое состояние тела и определяет степень его нагретости.

Нагрузка «Температура» используется для определения не изменяющейся со временем постоянной температуры элементов модели в стационарном и нестационарном тепловом анализе, а также - для определения разности температур в статическом анализе прочности конструкции при решении задач термоупругости.

Нагрузка «Начальная температура» используется для определения исходной температуры в нестационарном тепловом расчёте. Эта тепловая нагрузка определяет температуры выбранных элементов модели в нулевой момент времени.




В тех узлах конечно-элементной сетки, которые не принадлежат указанным элементам модели, в качестве начальной температуры будет установлено значение «по умолчанию». Оно определяется в диалоговом окне «Параметры задачи» на вкладке «Параметры».

Для задания нагрузки используйте команду:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<b>&lt;ЗТТ&gt;</b>	<b>«Анализ Тепловая нагрузка Температура»</b>	

*Температура* может быть приложена к телу, грани, ребру или вершине модели.

Для выбора элементов модели используйте опции автоменю:

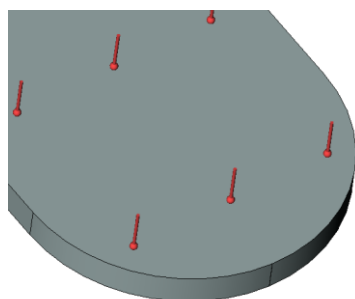
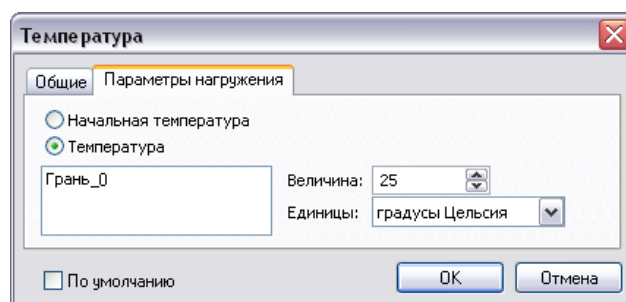
	<b>&lt;Е&gt;</b>	Выбрать элемент для нагружения
	<b>&lt;В&gt;</b>	Выбрать тело
	<b>&lt;М&gt;</b>	Выбрать все тела

Выбранные элементы заносятся в список.

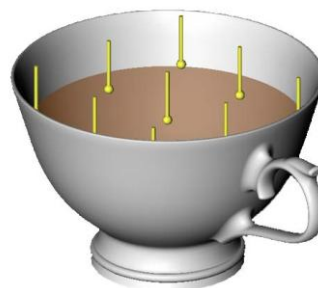
В окне свойств нагрузки «Температура» необходимо задать следующие параметры:

- Величину нагрузки;
- Единицы измерения: K, C, F.

В 3D сцене *Температура* отображается следующим образом:




Задание тепловой нагрузки «Температура»



Задание начальной температуры в нестационарном тепловом расчёте


### Типичная последовательность действий при задании тепловой нагрузки:

1. Инициировать команду «Температура» .
2. Установить опцию «Температура» или «Начальная температура».
3. Выбрать тело, грань, ребро, вершину или набор элементов
4. Задать значение температуры и единицы измерения.
5. Завершить команду.

## Тепловой поток

Нагрузка *Тепловой поток* позволяет задать количество теплоты, переносимое в единицу времени через единичную площадь поверхности, то есть задать удельный тепловой поток.

Для задания нагрузки используйте команду:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<b>&lt;3TF&gt;</b>	<b>«Анализ Тепловая нагрузка Тепловой поток»</b>	

*Тепловой поток* может быть приложен к грани модели. Для выбора граней используйте опции автоменю:

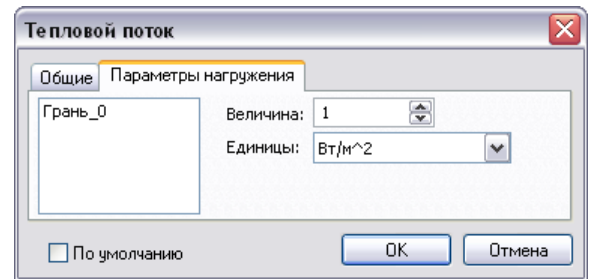
	<b>&lt;F&gt;</b>	Выбрать грань
---	------------------	---------------

Выбранные элементы заносятся в список.

В окне свойств нагрузки «Тепловой поток» необходимо задать следующие параметры:

- Величину нагрузки;
- Единицы измерения: Вт/м<sup>2</sup>, Вт/см<sup>2</sup>, BTU/c\*дюйм<sup>2</sup>.

Отрицательное значение величины теплового потока означает, что через заданную грань тело теряет энергию.




В 3D сцене *Тепловой поток* отображается следующим образом:



**Задание тепловой нагрузки «Тепловой поток»**

Типичная последовательность действий при задании нагрузки «Тепловой поток»:


1. Инициировать команду «Тепловой поток» ;
2. Выбрать грань;
3. Задать величину нагрузки;
4. Задать единицы измерения;
5. Завершить команду.

Тепловая мощность




Нагрузка *Тепловая мощность* позволяет задать:

- объемную мощность источников тепловой энергии;
- количество теплоты, переносимое в единицу времени через произвольную поверхность, называемое мощностью теплового потока (тепловой мощностью).

Для задания нагрузки используйте команду:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<ЗТР>	«Анализ Тепловая нагрузка Тепловая мощность»	

*Тепловая мощность* может быть приложена к телу, грани, ребру или вершине модели. Для выбора элементов модели используйте опции автоменю:

	<E>	Выбрать элемент для нагружения
	<B>	Выбрать тело
	<M>	Выбрать все тела

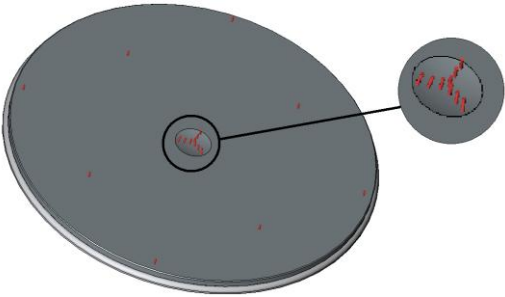
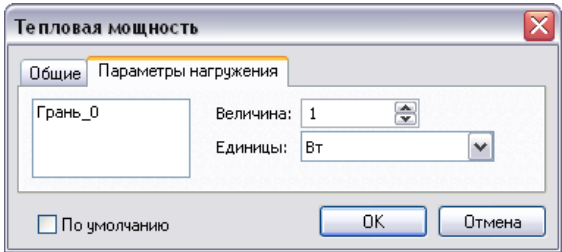
Выбранные элементы заносятся в список.

В окне свойств задайте:

- Величину нагрузки;
- Единицы измерения: Вт, BTU/c.


Отрицательное значение величины данной тепловой нагрузки означает, что тело теряет энергию.

В 3D сцене *Тепловая мощность* отображается следующим образом:



Задание тепловой нагрузки «Тепловая мощность»

Типичная последовательность действий при задании нагрузки «Тепловая мощность»:

1. Инициировать команду «Тепловая мощность» 
2. Выбрать тело, грань, ребро или вершину.
3. Задать величину нагрузки;
4. Задать единицы измерения
5. Завершить команду.

## Конвективный теплообмен

Конвективным теплообменом называется процесс переноса теплоты между поверхностью твёрдого тела и внешней средой (газ, жидкость).


Нагрузка *Конвективный теплообмен* позволяет задать количество теплоты, отдаваемое в единицу времени единицей поверхности при разности температур между поверхностью и внешней средой, равной одному градусу, то есть задать коэффициент теплоотдачи.

Для задания нагрузки *Конвективный теплообмен* используйте команду:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<ЗТС>	«Анализ Тепловая нагрузка  Конвективный теплообмен»	

Нагрузка *Конвективный теплообмен* определена для граней модели.

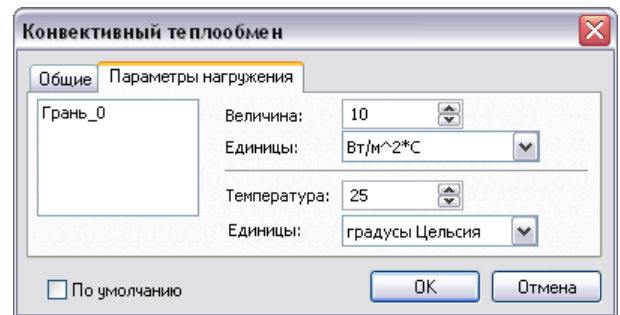
Для выбора граней используйте опции автоменю:

	<F>	Выбрать грань
---	-----	---------------

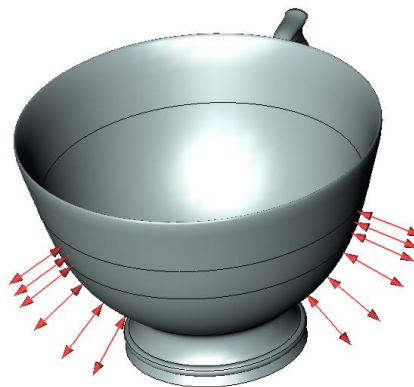
Выбранные элементы заносятся в список.

В окне свойств нагрузки *Конвективный теплообмен* необходимо задать следующие параметры:

- Коэффициент теплоотдачи;
- Единицы измерения: Вт/м<sup>2</sup>\*С, Вт/см<sup>2</sup>\*С, ВТУ/с\*дюйм<sup>2</sup>\*F;
- Температуру внешней среды (жидкости или газа);
- Единицы измерения: Кельвин [K], градусы Цельсия [C], градусы Фаренгейта [F].




В 3D сцене нагрузка «Конвективный теплообмен» отображается следующим образом:



Задание тепловой нагрузки «Конвективный теплообмен»


Типичная последовательность действий при задании нагрузки *Конвективный теплообмен*:

- 1. Инициировать команду «Конвективный теплообмен» .
- 2. Выбрать грань.
- 3. Задать значение коэффициента теплоотдачи и температуры окружающей среды.
- 4. Завершить команду.

Излучение

Нагретые тела излучают в окружающее пространство энергию в виде колебаний электромагнитного поля. Излучение, попадающее на некоторое тело, частично отражается, частично поглощается, а также частично проходит через него.

Для задания *Излучения* используйте команду:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<3TR>	«Анализ Тепловая нагрузка Излучение»	

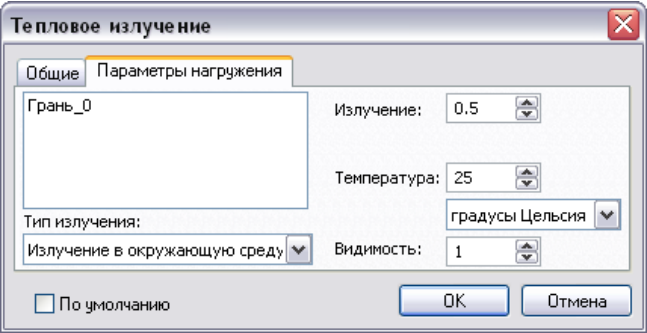
Нагрузка *Излучение* определена для граней модели. Для выбора граней используйте опцию автоменю:

	<E>	Выбрать элемент для нагружения
---	-----	--------------------------------

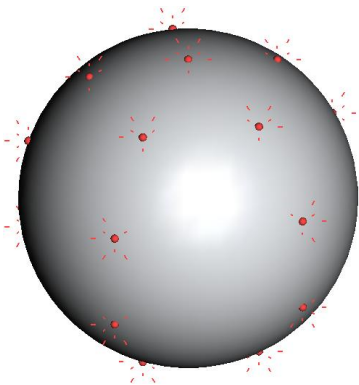
Выбранные элементы заносятся в список.

В окне свойств нагрузки *Излучение* необходимо задать следующие параметры:

- Тип излучения: излучение в окружающую среду;
- Коэффициент излучения;
- Температуру внешней среды;
- Единицы измерения: кельвин [K], градусы Цельсия [C], градусы Фаренгейта [F].
- Фактор видимости грани.




В 3D сцене нагрузка «Излучение» отображается следующим образом:



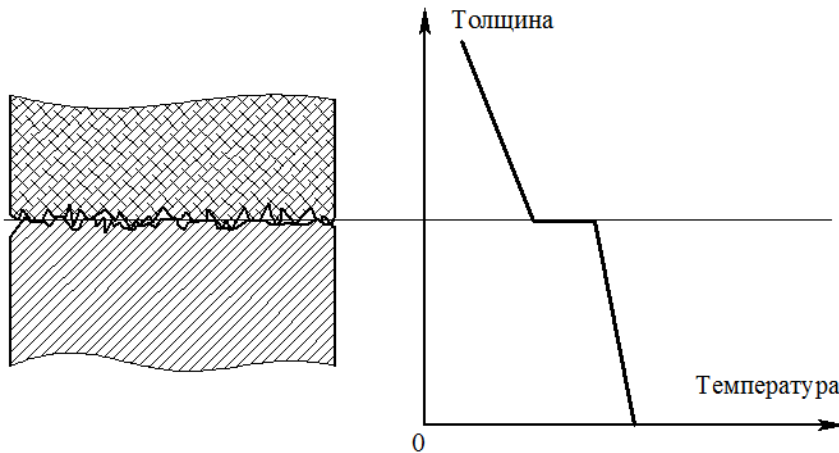
Задание тепловой нагрузки «Излучение»

Типичная последовательность действий при задании нагрузки *Излучение*:

1. Инициировать команду «Излучение» .
2. Задать тип излучения.
3. Задать коэффициент излучения.
4. Задать температуру внешней среды и единицы измерения.
5. Задать фактор видимости грани.
6. Завершить команду.

### Тепловой контакт (Термическое сопротивление)

Контакт между физическими телами практически никогда нельзя считать идеальным. Из-за шероховатости поверхностей контакта на границе двух тел образуются микроскопические зазоры, заполненные воздухом или другой окружающей средой. Эта окружающая среда имеет коэффициенты теплопроводности, отличающиеся от контактирующих твёрдых тел. В результате на границе контактирующих тел происходит скачкообразное изменение непрерывного температурного поля, вызванное, как правило, худшими условиями проводимости тепловой энергии на границе контактирующих тел.






Это физическое явление называется тепловым сопротивлением.

Для задания теплового сопротивления предназначена команда:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<3T3C>	<b>«Анализ  Тепловая нагрузка   Тепловой контакт»</b>	

После вызова команды становятся доступны следующие опции автоменю:

	<C>	Выбрать контактные грани
	<1>	Выбор граней 1
	<X>	Отменить выбор всех граней

Укажите левой кнопкой мыши грани, участвующие в тепловом контакте. Можно указать несколько наборов граней, если параметры теплового контакта в них одинаковы.

После этого необходимо выбрать тип теплового сопротивления: полное или распределенное.




- Полное сопротивление имеет единицы измерения град/Вт. Его величина характеризует суммарную потерю тепловой мощности через всю поверхность контакта (поверхность может быть составной).
- Распределенное сопротивление характеризует потерю теплового потока, приходящуюся на единицу площади поверхности контакта. Единицы измерения град\*м<sup>2</sup>/Вт.

Ориентировочные значения коэффициентов теплового сопротивления приведены в следующей таблице:

Контактные грани	Тепловое сопротивление (м <sup>2</sup> · °К/ Вт)
Железо/алюминий	$2,22 \cdot 10^{-5}$
Медь/медь	$1 \cdot 10^{-4} - 4 \cdot 10^{-5}$
Алюминий/алюминий	$4,54 \cdot 10^{-4} - 8,33 \cdot 10^{-5}$
Нержавеющая сталь/ нержавеющая сталь	$5 \cdot 10^{-4} - 2,7 \cdot 10^{-4}$
Нержавеющая сталь/ нержавеющая сталь (разреженные зазоры)	$5 \cdot 10^{-3} - 9,09 \cdot 10^{-4}$
Керамика/керамика	$2 \cdot 10^{-3} - 3,33 \cdot 10^{-4}$

Типичный порядок действий при задании контактных ограничений:


1. Инициировать команду «Тепловой контакт» .
2. Выбрать контактные грани первого тела.
3. Выбрать контактные грани второго тела.
4. Задать тип контакта.
5. Завершить команду.

## Сводная таблица нагрузок

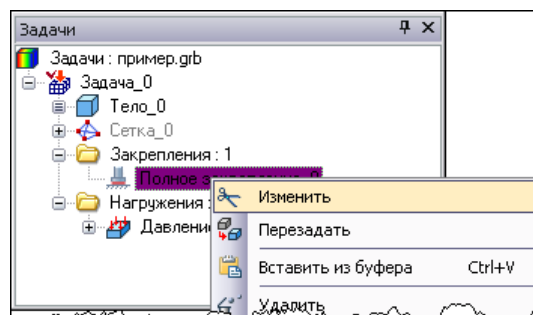
Вид нагрузки	Место приложения	Связанные объекты	Входные параметры
<b>Сосредоточенная сила</b>	Вершина	Объекты, выбранные для определения направления, локальная система координат	Единицы измерения, значение силы
<b>Равномерно распределённая сила</b>	Грань, ребро	Объекты, выбранные для определения направления, локальная система координат; нормаль к выбранной грани	Единицы измерения, значение силы


<b>Неравномерно распределённая сила</b>	Грань	Объекты, выбранные для определения направления, локальная система координат; нормаль к выбранной грани	Единицы измерения, значение силы, закон распределения
<b>Изгибающие моменты</b>	Вершина, ребро, грань	Локальная система координат	Единицы измерения, значения изгибающих моментов
<b>Равномерное давление</b>	Грань, ребро	Объекты, выбранные для определения направления; локальная система координат; нормаль к выбранной грани	Единицы измерения; значение давления
<b>Неравномерное давление</b>	Грань	Объекты, выбранные для определения направления; локальная система координат; нормаль к выбранной грани	Единицы измерения; закон распределения давления
<b>Гидростатическое давление</b>	Грань	Локальная система координат	Плотность жидкости; единицы измерения
<b>Вращение</b>	Тело	Объекты, выбранные для определения оси; локальная система координат	Значение угловой скорости и углового ускорения, единицы измерения
<b>Ускорение</b>	Тело	Объекты, выбранные для определения направления, локальная система координат	Единицы измерения, значение ускорения
<b>Цилиндрическая нагрузка</b>	Цилиндрическая грань	Объекты, выбранные для определения направления; локальная система координат	Единицы измерения, значение нагрузки
<b>Крутящий момент</b>	Грань	Объекты, выбранные для определения оси; локальная система координат	Единицы измерения, значение момента
<b>Температура</b>	Тело, грань, ребро, вершина	-	Величина нагрузки, единицы измерения
<b>Тепловой поток</b>	Грань	-	Величина нагрузки, единицы измерения
<b>Тепловая мощность</b>	Тело, грань, ребро, вершина	-	Величина нагрузки, единицы измерения
<b>Конвективный теплообмен</b>	Грань	-	Коэффициент теплоотдачи, температура внешней среды, единицы измерения
<b>Излучение</b>	Грань		Тип излучения, коэффициент излучения, температура внешней среды, единицы измерения,

## Редактирование нагрузок и закреплений

Для изменения заданных нагрузок и закреплений нужно использовать команду **«Изменить»**, которая находится в составе контекстного меню при выборе элемента задачи  в окне задач или в окне «3D модель».

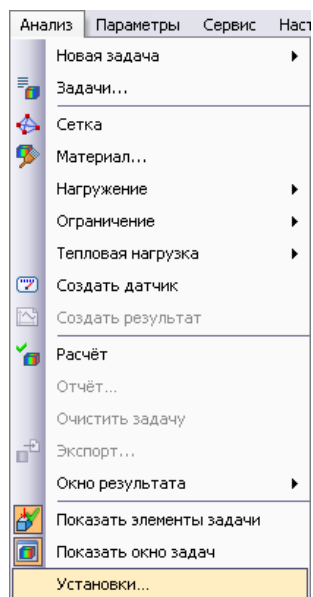
Дальнейшие действия пользователя по изменению нагрузок или закреплений будут мало отличаться от процесса их создания. В окне свойств можно изменить численные параметры, а при помощи соответствующих опций автоменю (см. выше) отменить выбор и задать новые определяющие элементы модели.



После завершения внесения изменений нужно подтвердить свои действия нажатием на .

## Настройки и сервисные команды

С помощью команды **«Анализ|Установки...»** пользователь может определить глобальные настройки системы T-FLEX Анализ.



На закладке [**Процессор**] определяются следующие параметры:

**Каталог временных файлов** – определяет путь к каталогу, в котором сохраняются промежуточные рабочие данные при решении систем уравнений. По умолчанию рабочие файлы сохраняются в папке, определяемой системной переменной “TEMP”, (“TMP”) ОС Windows. При необходимости пользователь может переопределить этот путь.

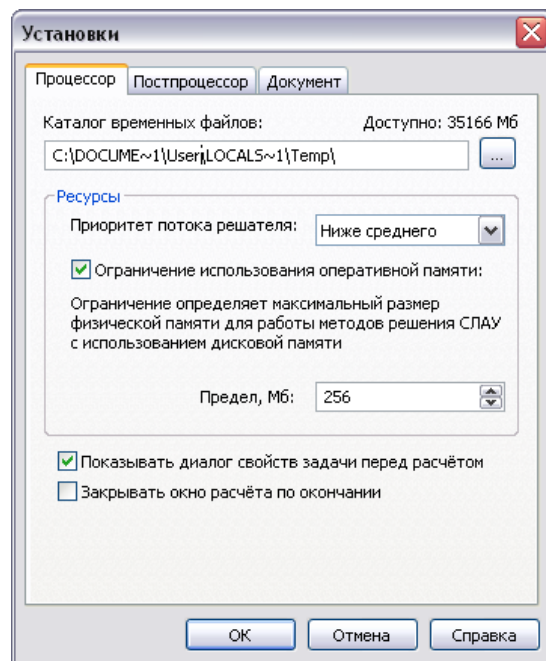
В группе «**Ресурсы**» определяются следующие параметры:

**Приоритет потока решателя** – позволяет пользователю определить системный приоритет модулей, ответственных за решение систем уравнений. В зависимости от установленного приоритета операционная система Windows будет распределять системные ресурсы, отдавая предпочтение более высокому приоритету. Например, если планируется длительное время решать большую задачу с использованием дисковой памяти, пользователь может предварительно установить приоритет «Ниже обычного» или «Низкий», что позволит ему без особых ограничений осуществлять параллельную работу в других приложениях Windows.

**Ограничение использования оперативной памяти** – позволяет пользователю задать объём оперативной памяти, при превышении которого система будет переходить в режим решения уравнений с использованием дисковой памяти, на что, обычно, требуется значительно больше времени.

**Показывать диалог свойств задачи перед расчётом** – активный элемент управления включает режим автоматического вызова диалога свойств задачи при инициализации команды «**Анализ|Расчёт**» для всех задач (установка по умолчанию).

**Закрывать окно расчёта по окончании** - элемент управления включает режим автоматического закрытия информационного окна с отображением процесса решения систем уравнений во всех задачах. По умолчанию этот режим не активирован.



На закладке **[Постпроцессор]** пользователь может определить глобальные настройки визуализации результатов, распространяющиеся на все задачи.

**Основной шрифт** – устанавливает шрифт по умолчанию для текстовой информации, выводимой в окно визуализатора Постпроцессора (название задачи, тип результата и т.п.).

**Шрифт шкалы** – устанавливает шрифт отображения цифровых значений цветовой шкалы.

Элемент управления **«Всплывающие подсказки со значениями»** включает режим, при котором при наведении курсора на участок модели в окне Постпроцессора появляется всплывающая подсказка с интерполированным значением результата, соответствующего координате модели под курсором.

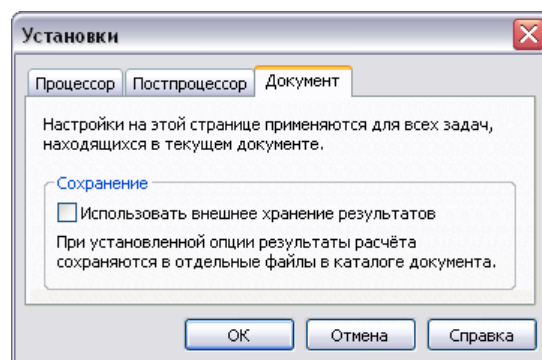
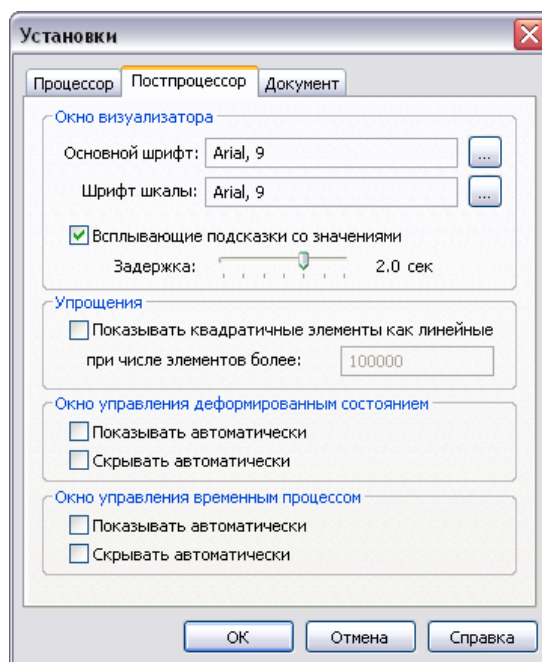
Элемент управления **«Задержка»** позволяет задать временной интервал появления всплывающей подсказки.

В группе **«Упрощения»** задаётся порог количества конечных элементов, при котором результаты расчета в окне Постпроцессора отображаются только для основных узлов квадратичных конечных элементов, а результаты в узлах, находящихся на серединах ребер элементов, опускаются (это не касается экстремальных значений). Такой режим позволяет значительно ускорить загрузку результатов в окно Постпроцессора на очень больших сетках (более 1000000 элементов).

Опции **«Показывать окно автоматически»**, **«Скрывать окно автоматически»** в группах **«Окно управления деформированным состоянием»** и **«Окно управления временным процессом»** позволяют управлять отображением плавающих панелей **«Деформированное состояние»** и **«Временной процесс»**, соответственно.


На закладке **[Документ]** можно активировать опцию сохранения результатов расчета задач в отдельном внешнем файле. По умолчанию результаты расчетов сохраняются в основном файле документа T-FLEX (расширение .grb). При активации внешнего хранения результатов в директории исходного документа создаётся файл с именем **«Имя документа\_Имя задачи»** и расширением .tfa).

Данная опция может быть полезной при решении задач с большими объёмами результатов, а также может ускорять сохранение документа (зависит от операционной системы).



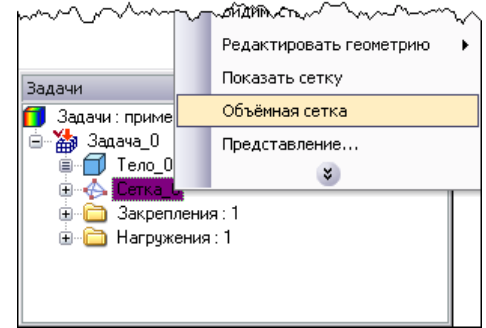
## Работа с 3D окном при подготовке элементов задач

При работе с задачами в 3D сцене могут отображаться элементы задач – нагрузки, закрепления, сетка. Для управления этими изображениями существуют отдельные команды.


Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<b>&lt;ЗМН&gt;</b>	<b>«Анализ Показать нагрузки/закрепления»</b>	

При помощи данной команды можно включать и выключать режим отображения всех нагрузок и закреплений в 3D сцене. Эта же команда доступна в контекстном меню при выборе задачи.

В 3D окне может быть показана сгенерированная поверхностная или объёмная сетка. Изображение поверхностной сетки автоматически появляется после завершения процесса генерации. При отображении сетки модель не показывается. Если нужно работать с моделью (например, задать закрепление на грани модели), система гасит сетку автоматически. Для того, чтобы снова посмотреть сетку, можно воспользоваться командой **«Показать сетку»**. Эта команда доступна в контекстном меню при выборе элемента «Сетка» в окне задач. Также в этом меню есть команды для переключения между видами поверхностной или объёмной сеток. Команды называются **«Объёмная сетка»** или **«Поверхностная сетка»**.



### Особенности работы с параметрической моделью


Модель T-FLEX CAD, как правило, является параметрической. Преимущества параметрической модели можно в полной мере использовать при расчёте. В результате параметрических изменений трёхмерной модели все связанные с моделью элементы задач (нагрузки, закрепления, сетка) могут быть автоматически пересчитаны, и их не потребуется заново задавать. Некоторые элементы задач, требующие заметных вычислительных ресурсов (например, сетки), иногда удобнее обновлять вручную. Для того чтобы обновить какой-либо элемент задачи, необходимо выбрать команду **«Обновить»** в контекстном меню, вызываемом нажатием  на элементе задачи.


При исчезновении родительского элемента (например, грани, к которой приложена сила) может потребоваться ручное редактирование элемента задачи для учета изменений в модели.

После обновления данных задачи потребуется заново выполнить расчёт для получения актуальных результатов.

### Экспорт

Подготовленные исходные данные каждой задачи можно экспортировать в формате Nastran (\*.dat). Для экспорта активной задачи используйте команду:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<b>&lt;ЗМХ&gt;</b>	<b>«Анализ Экспорт»</b>	

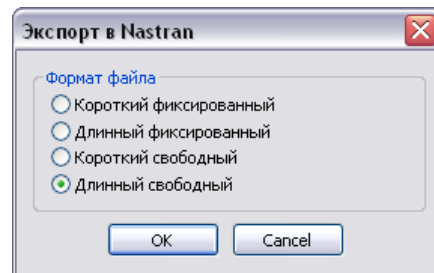
Также данная команда доступна через контекстное меню при выборе задачи  в окне «Задачи» или в окне «3D модель».

После вызова команды появится стандартный диалог сохранения файла.

Далее необходимо задать комбинацию двух свойств формата:

**Короткий/длинный** – задаёт точность выходных параметров (максимальный размер чисел в десятичных знаках, включая точку): короткий - до 8 десятичных знаков, длинный - до 16 десятичных знаков.

**Фиксированный/свободный** – определяет вид экспортируемых данных: фиксированный - данные выводятся в столбцах фиксированного размера, свободный - данные выводятся через запятую.




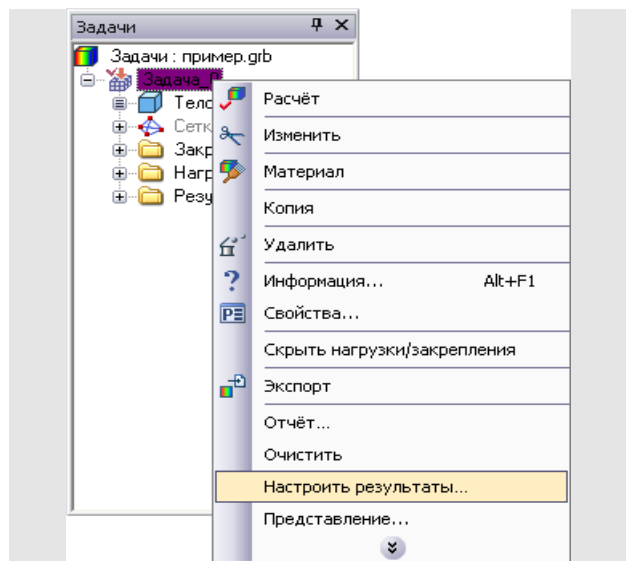
## ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ (ПОСТПРОЦЕССОР)

Постпроцессор T-FLEX Анализа предназначен для всестороннего изучения результатов конечно-элементного моделирования. Особенностью постпроцессора T-FLEX Анализа является его глубокая интеграция с T-FLEX CAD. Результаты расчётов отображаются в отдельном окне, во многом аналогичном по управлению окну для 3D моделирования T-FLEX CAD. Все результаты могут быть показаны в виде цветовой раскраски рассчитанной модели. Также имеется средство для локального опроса точных значений в любом месте модели. При отображении результатов модель может показываться в масштабируемом деформированном состоянии. При включении специальной «анимации» можно в движении увидеть характер изменения деформаций от нулевых до расчётных значений.

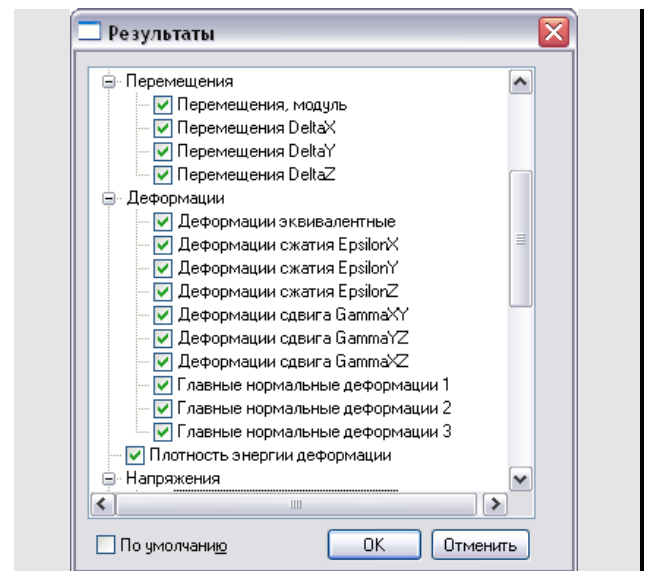
### Общие принципы работы с результатами

Список доступных для просмотра результатов конечно-элементных расчётов отображается в дереве задач в папке «Результаты».

Настройка списка результатов, отображаемого в дереве задач, осуществляется по команде **«Настроить результаты...»** из контекстного меню по нажатию  на имени выбранной задачи. Эта команда вызывает диалог настройки отображаемых в дереве задач результатов.





Вызов команды «Настроить результаты...»



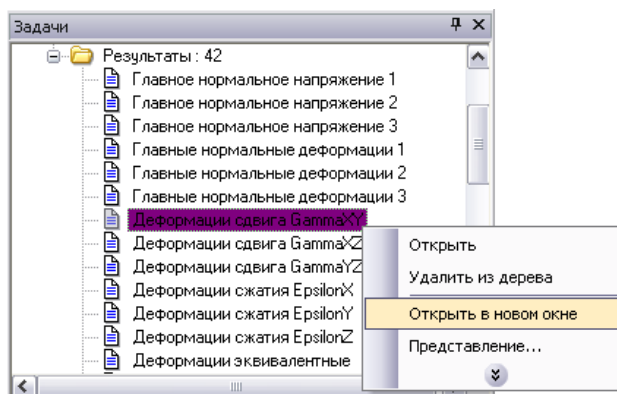
Диалог настройки списка результатов

Доступ к результатам для просмотра можно осуществить несколькими способами:


1. По  на названии результата в дереве задач открывается окно Постпроцессора с выбранным результатом.
2. Из контекстного меню по нажатию  на выбранном в дереве задач результате по команде **«Открыть»** или **«Открыть в новом окне»**. Постпроцессор T-FLEX Анализа поддерживает




работу в многооконном режиме. Одновременно может быть открыто несколько окон с разными результатами, или несколько окон с одним и тем же результатом.

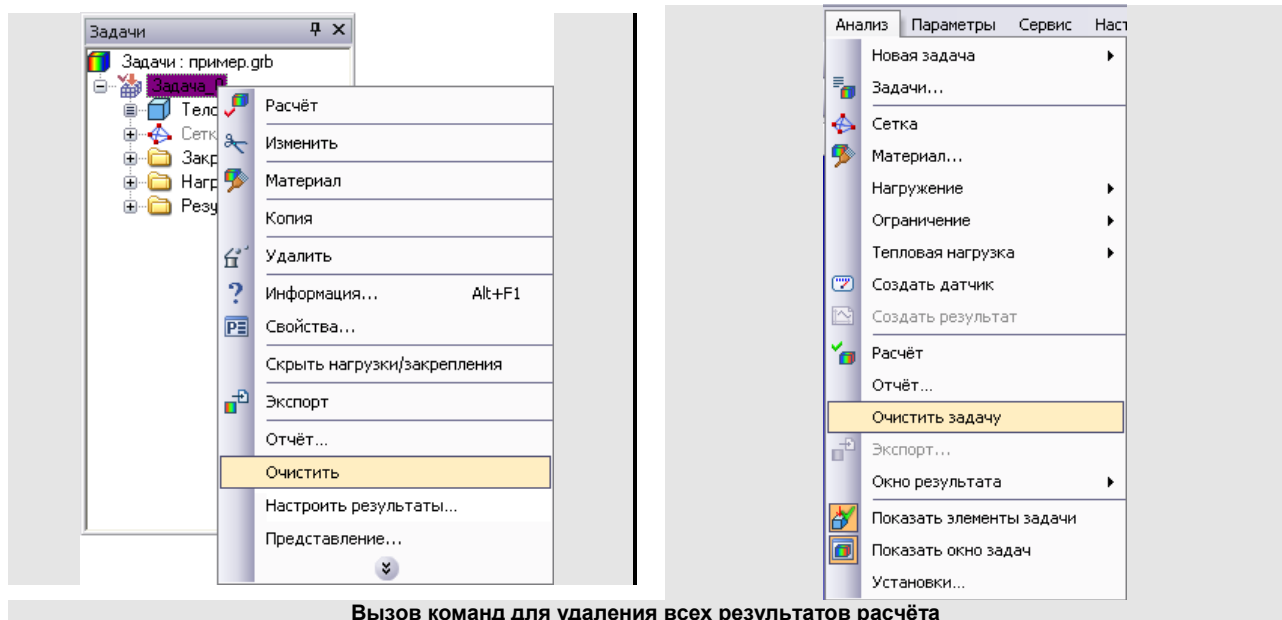


Контекстное меню для открытия результата

Для удаления результата из дерева задач нужно использовать команду **«Удалить из дерева»** контекстного меню по нажатию  на выбранном в дереве задач результате. Результат перестанет отображаться в дереве задач, однако его можно будет снова добавить в дерево, используя уже упомянутую команду **«Настроить результаты...»**.

При добавлении/удалении результатов в список заново запускать расчёт задачи не требуется.

Для действительного удаления всех результатов (задача при этом становится «не рассчитанной») используется команда **«Очистить задачу»**, доступная для *активной* задачи из основного меню или команда **«Очистить»**, доступная из контекстного меню по нажатию  на имени выбранной задачи в дереве задач.




Вызов команд для удаления всех результатов расчёта

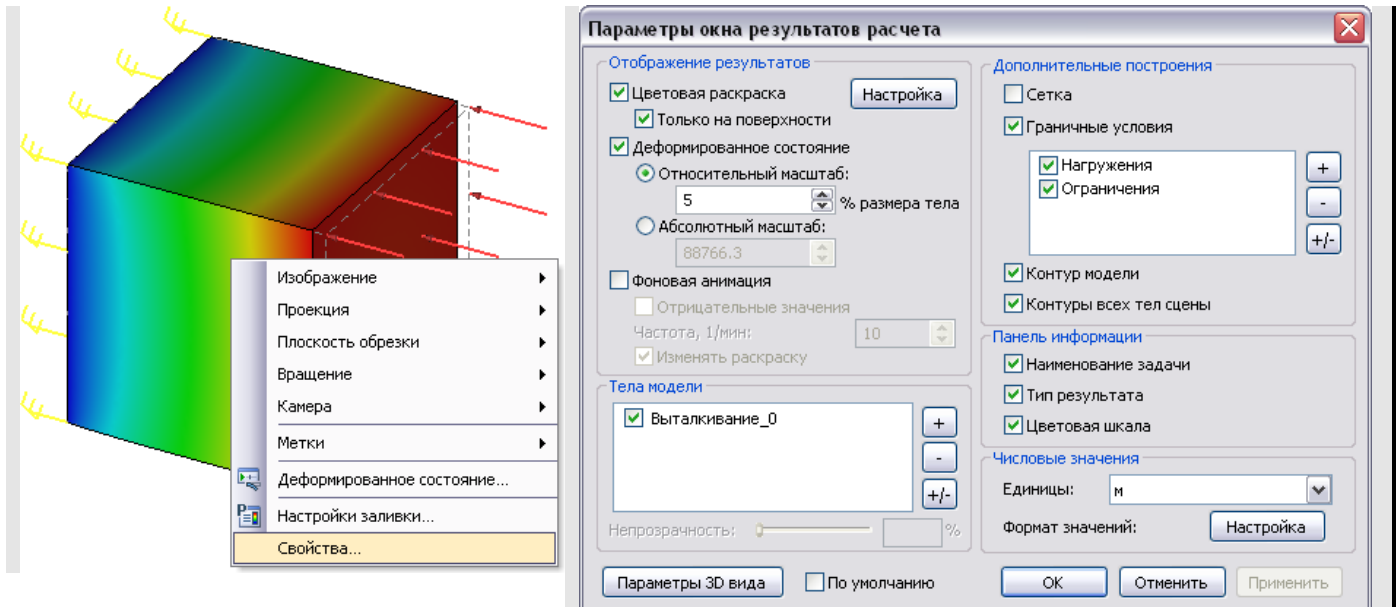
Результаты расчёта задач и сетки могут храниться вместе с моделью в \*.grb файле. Однако при этом пользователь должен понимать, что сохранение этих данных значительно увеличивает размер файла.

В случаях, когда нужно добиться минимального размера файла, рекомендуется перед сохранением удалить сетки очистить результаты расчета во всех задачах. Граничные условия остаются без изменений. При последующем открытии нужно будет заново создать сетки и выполнить расчет.

## Настройки и сервисные команды окна результатов расчёта

### Настройка окна результатов расчёта

Настройки окна результатов расчёта вызываются  в пределах окна визуализации результата или из контекстного меню.



Диалог настройки параметров окна результатов расчёта

Диалог параметров окна результатов расчёта имеет пять групп настроек.

В группе «**Отображение результатов**» доступны следующие элементы управления:

**Цветовая раскраска.** Данный флажок включает и выключает режим цветовой раскраски рассчитанной модели. Раскраска производится в соответствии с отображаемыми результатами расчёта и настройками цветовой шкалы. Цвет области модели соответствует определённому численному значению. Настройка цветовой шкалы осуществляется в отдельном диалоге (см. ниже).

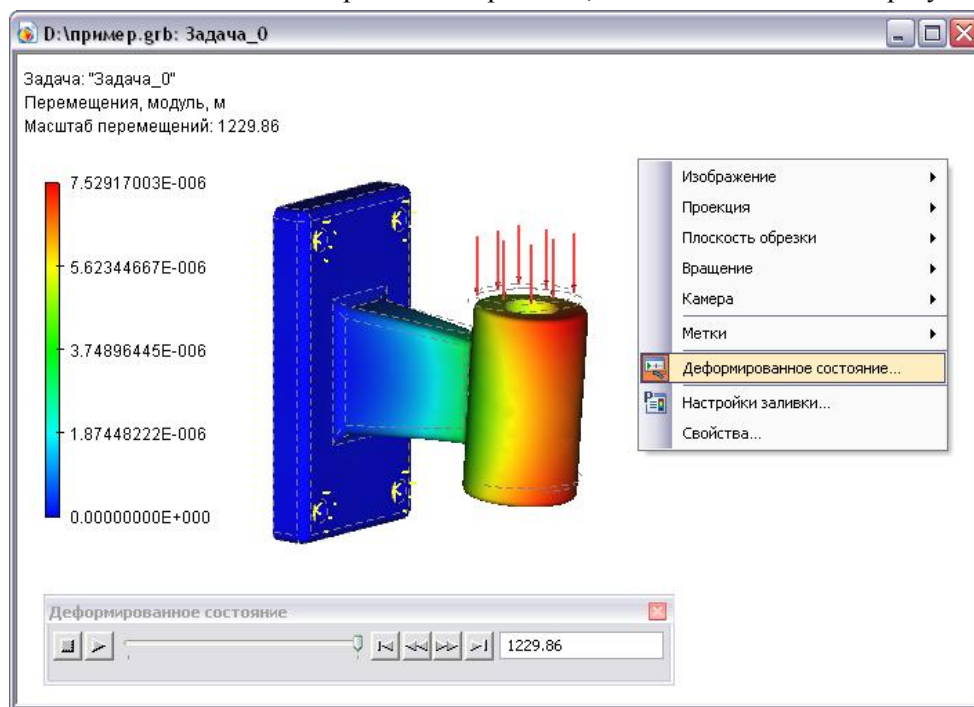
**Только на поверхности.** Включает режим отображения поверхностной сетки. При выключении флажка отображается объёмная сетка.

**Деформированное состояние.** Этот флажок управляет способом отображения результирующей конечно-элементной модели: она может показываться либо в деформированном состоянии, либо в исходном.

**Масштаб.** Устанавливает масштаб деформаций рассчитанной модели. Может задаваться в относительных и абсолютных величинах.

Изначально масштаб подобран системой автоматически, но пользователь может его менять по своему усмотрению.

**Фоновая анимация.** Этот флажок включает режим анимации окна постпроцессора, при котором значение деформаций постепенно изменяется от нуля до рассчитанного значения. Для управления анимацией и отображением деформированного состояния можно использовать также плавающую панель, доступ к которой осуществляется из контекстного меню в окне постпроцессора (команда «Деформированное состояние» или «Временной процесс», в зависимости от типа результата).



Использование плавающей панели для управления отображением деформированного состояния и анимации

**Частота.** Параметр устанавливает частоту, с которой выполняется полный цикл анимации. Число означает, за какую долю минуты пройдет полный цикл анимации.

**Изменять раскраску.** Управление изменением раскраски при выполнении анимации. Цвета могут изменяться синхронно с изменением деформированного состояния – от нуля до конечных значений. При показе отрицательных деформаций цвета не инвертируются.

**Отрицательные значения.** Данный параметр включает режим, при котором во время анимации результаты сначала доходят до нуля, а затем достигают тех же расчётных значений с противоположным знаком. При этом достигается эффект «колебания» рассчитанной модели, как если бы нагрузка периодически меняла свой знак на противоположный.

Группа «**Тела модели**» позволяет управлять отображением в окне Постпроцессора тел, входящих в состав сборочной модели, при расчёте сборок. Пользователь может погасить флажок, соответствующий одной или нескольким деталям сборки, после чего они перестанут отображаться в окне постпроцессора. Используя элемент управления **Непрозрачность** можно также управлять прозрачностью деталей сборки, отображаемых в окне результатов расчёта. Эти инструменты позволяют визуализировать поля результатов внутри сборочной модели, за счёт временного скрытия мешающих объектов.

В группе параметров «**Дополнительные построения**» доступны элементы управления, задающие видимость вспомогательных изображений вокруг рассчитанной модели для более наглядной интерпретации результата.

**Сетка.** Управляет видимостью граней сетки в окне результатов расчёта.

**Граничные условия.** Управляет видимостью всех граничных условий, задействованных в текущей задаче. Список типов граничных условий отображается в отдельном окне. Видимостью каждого элемента этого списка можно управлять индивидуально. Справа от окна расположены кнопки для работы с элементами списка. При помощи этих кнопок можно включить (+), выключить (-) или инвертировать (+/-) видимость всех граничных условий.

**Контур модели.** При включении данного флажка контуры исходного тела, участвовавшего в расчёте, отображаются в окне результатов расчёта в виде пунктирных линий. Эта возможность может быть полезна для сравнения деформированного состояния модели с исходным.

**Контуры всех тел сборки.** При включении данного флажка в окне результатов расчёта пунктиром также показываются контуры всех тел 3D сцены, не участвовавших в расчёте.

Группа параметров «**Панель информации**» содержит элементы управления для регулировки количества выводимой текстовой и графической информации:

**Цветовая шкала.** Данный флажок включает видимость цветовой шкалы для более наглядной интерпретации результатов расчёта. Диапазон шкалы и цвета можно настраивать (см. ниже «**Настройка шкалы**»). Шкала отображается в левой части окна результатов расчёта.

**Наименование задачи.** Данный флажок включает отображение имени текущей задачи в окне результатов расчёта.

**Тип результата.** Данный флажок включает отображение названия типа расчёта.

В группе «**Числовые значения**» доступны следующие элементы управления:

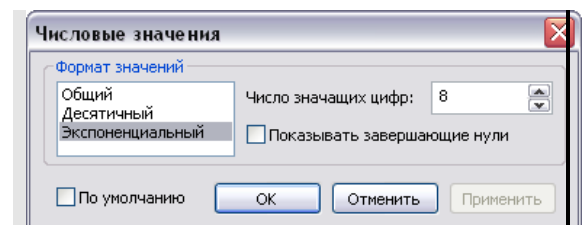
**Единицы.** Позволяет установить единицы измерения (метр, дюйм, миллиметр), в которых отображается результат.

Параметр «**Формат значений**» для удобства восприятия устанавливает формат чисел шкалы – он может быть десятичным, экспоненциальным или общим (смешанным).


Общий формат значения до 1000 показывает в десятичном формате, больше 1000 – в экспоненциальном.

В специальном поле справа устанавливается число зна-

чащих цифр для экспоненциального формата и число знаков после запятой для десятичного. «Лишние» нули могут быть автоматически отброшены, если выключить флаг «Показывать завершающие нули».



## Настройка цветовой шкалы

Диалог настроек цветовой шкалы можно вызвать из окна параметров результатов расчёта (кнопка **[Настройка]**), либо из контекстного меню, вызванного в окне результатов расчёта нажатием .

Настройки цветовой шкалы нужно выполнять с целью приведения в соответствие требуемых цветов и полученных значений. Первоначальную настройку система выполняет автоматически. Она

равномерно распределяет стандартный спектр из пяти цветов между максимальным и минимальным значениями, полученными в данном расчёте.

В группе параметров «**Диапазон**» устанавливаются параметры распределения числовых значений по цветовой шкале:

#### **Линейная/Логарифмическая.**

Логарифмическая шкала по умолчанию используется для отображения результата «Коэффициент запаса по напряжению». Это делается для того, чтобы получить более детальную цветовую картину в наиболее ответственном диапазоне – где значения коэффициента приближаются к единице. Пользователь также может переключить режим отображения на линейную шкалу для этого результата. Для других результатов всегда используется только линейная шкала.

**Максимум.** Данный элемент управления позволяет установить соответствие между максимальным значением и верхним крайним цветом спектра. По умолчанию выбирается максимальное значение, но пользователь может ввести собственную интересующую величину в соответствующем поле.

**Минимум.** Здесь предоставляется возможность установить соответствие между минимальным значением и нижним крайним цветом спектра. В остальном этот элемент управления аналогичен предыдущему.

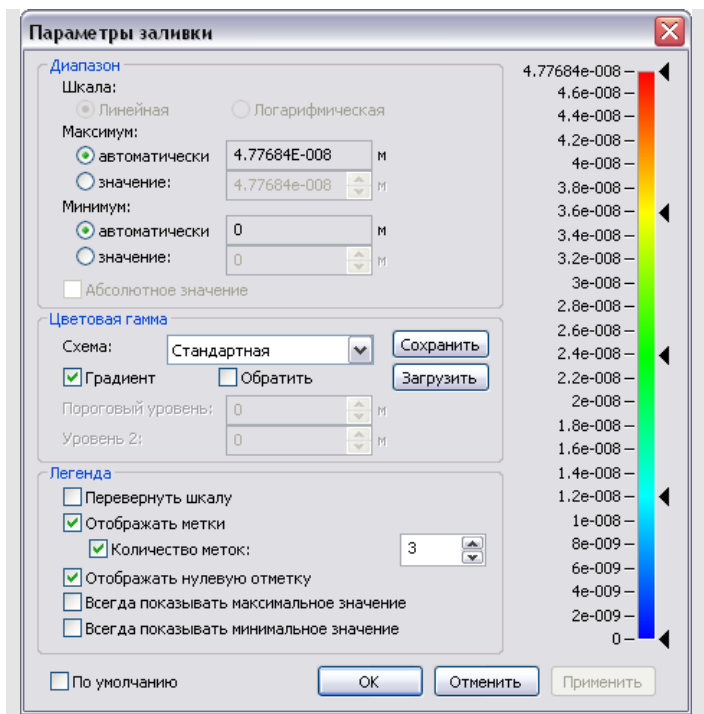
**Абсолютное значение.** Включает режим отображения в окне результатов расчёта значений в узлах по модулю (без учёта знака). Режим является вспомогательным. Его можно использовать для анализа результатов, если интересуют амплитудные значения компонентов перемещений или других величин.

Ввод максимальных и минимальных значений можно использовать для специальной настройки отображения результатов. Например, для отображения результата «Коэффициент запаса по напряжениям» можно ограничить максимальное значение коэффициента запаса, с целью более наглядного отображения данного результата в окне постпроцессора.

Группа параметров «**Цветовая гамма**» позволяет настраивать количество цветов в цветовой шкале.

**Схема.** Имеется семь предварительных настроек и одна пользовательская.


**Стандартная.** Эта настройка выводит шкалу из пяти основных цветов.






**Оттенки серого.** Данная настройка включает черно-белую шкалу.

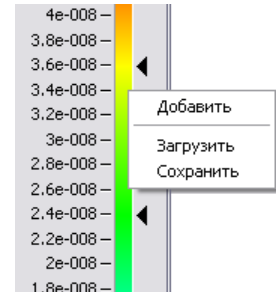
**Полный спектр.** При включении этой настройки шкала представляет собой полную радугу из 7 основных цветов.

Кроме того, имеются цветовые схемы **Максимум, Минимум, Порог, Диапазон.**

**Пользователя.** Можно самостоятельно настроить цветовую шкалу, сохранив вариант в специальный файл для последующей быстрой загрузки (файл с расширением \*.col). Настройка осуществляется в правой части диалога, где имеется изображение цветовой шкалы. Справа от шкалы есть несколько треугольных меток, обозначающих место какого-либо цвета в шкале. При помощи этих меток можно задать новое положение цвета в шкале. Для перемещения метки нажмите по ней  и, удерживая кнопку нажатой, переместите.

Для создания новой метки с новым цветом произведите  справа от шкалы. Появится стандартное окно Windows для задания цвета.

Для удаления метки её нужно переместить за пределы цветовой шкалы. Для изменения цвета, соответствующего существующей метке, нужно использовать . Для настроек шкалы можно также использовать контекстное меню, вызываемое нажатием  на изображении цветовой шкалы.



**Градиент.** Данный флажок, включенный по умолчанию, позволяет установить плавный переход от одного цвета к другому в цветовой шкале.

**Обратить.** Позволяет обратить цветовую шкалу.

В группе параметров «**Легенда**» доступны следующие элементы управления:

**Перевернуть шкалу.** Этот флажок переворачивает шкалу значений. Данный режим по умолчанию используется при отображении результата «Коэффициент запаса по напряжениям» в статическом анализе. Это удобно для отображения критических значений, близких к единице, красным цветом.

**Отображать метки.** Включение данного флажка позволяет отображать метки с числовыми значениями на цветовой шкале в окне результатов.

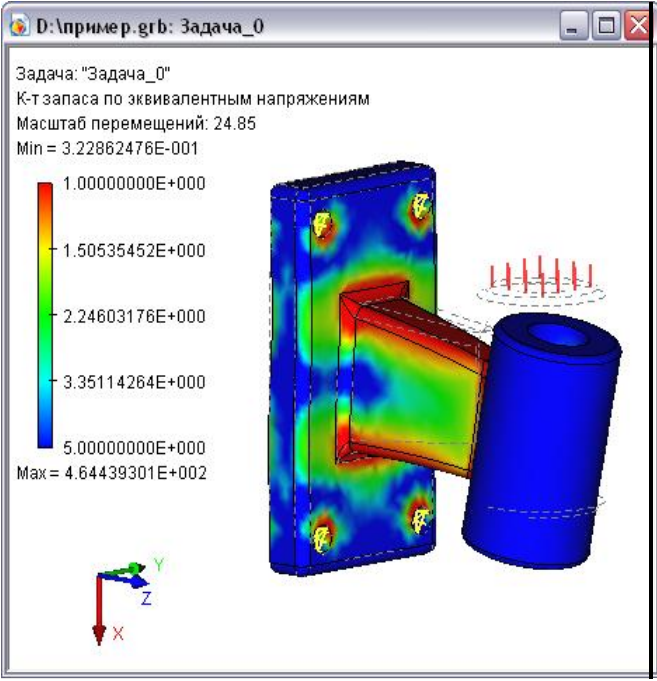
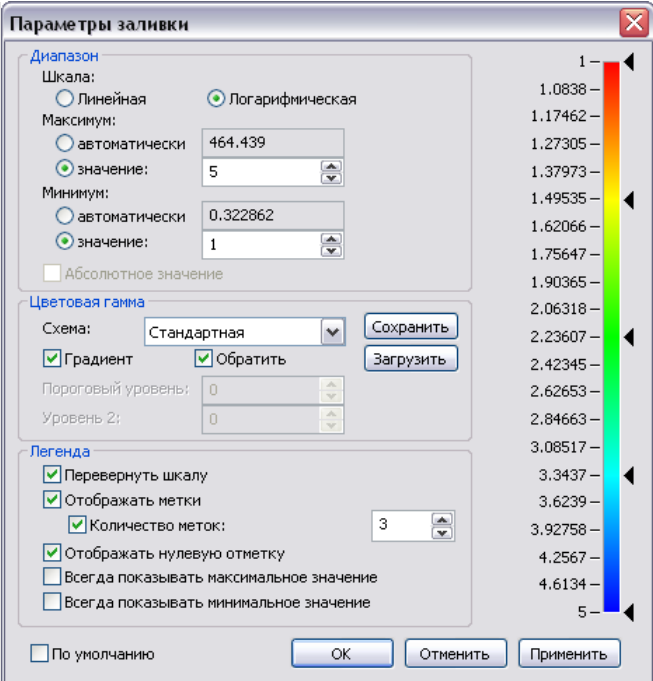
**Количество меток.** Устанавливает количество меток.

**Отображать нулевую отметку.** Позволяет отображать на цветовой шкале метку с нулевым значением.

**Всегда показывать максимальное значение.** При включенном флажке в окне результатов расчёта появляется строка с указанием максимального значения.

**Всегда показывать минимальное значение.** При включенном флажке в окне результатов расчёта появляется строка с указанием минимального значения.





Настройка диапазона значений шкалы для отображения результатов

Использование датчиков для анализа результатов

В T-FLEX Анализе существует возможность измерения результатов расчёта конечно-элементного анализа в некоторой заданной пользователем точке с помощью датчиков.

Датчики можно создавать только для активной задачи конечно-элементного или динамического анализа при помощи команды:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<3MD>	«Анализ Создать датчик»	

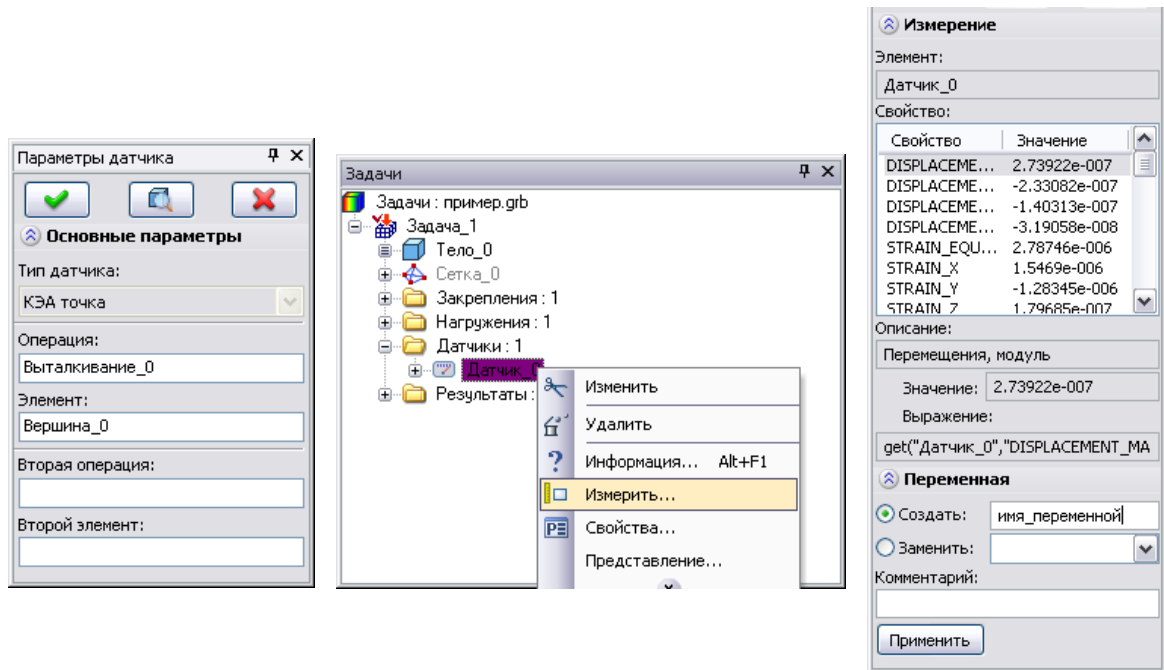
В окне свойств тип датчика определен как КЭА точка, так как он используется для задачи конечно-элементного анализа.

Для задания точки, где будет создан датчик, используйте опцию автоменю:

	<V>	Выбрать точку
--	-----	---------------

Такой точкой может быть вершина на профиле/пути, вершина на теле, центр кривой/ребра, середина ребра, центр сферы/тора или 3D узел.

В диалоге параметров датчика имеется набор полей («Операция», «Элемент», «Вторая операция», «Второй элемент»), в которые заносятся имена выбранных пользователем объектов.



Этапы создания датчика

Датчик предназначен для измерения результатов расчёта задачи конечно-элементного анализа в указанной пользователем точке. Для этого необходимо сначала выполнить расчёт задачи конечно-элементного анализа (даже если задача уже была рассчитана), а затем из контекстного меню, вызываемого при выборе «Датчика» правой кнопкой мыши в окне «Задачи», вызвать команду «Измерить».

В появившемся диалоге свойств в таблице «Свойство» можно выбрать интересующий тип результата и посмотреть значение. Пояснения для ключей, содержащихся в первом столбце таблицы, можно посмотреть в графе «Описание» под таблицей.

Выбранное значение можно сохранить при помощи «Переменной». Для этого необходимо выбрать опцию «Создать» в группе «Переменная», задать имя переменной и нажать кнопку [Применить].

Датчики используются также для измерения контрольных данных при решении оптимизационных задач с использованием результатов конечно-элементных расчётов.

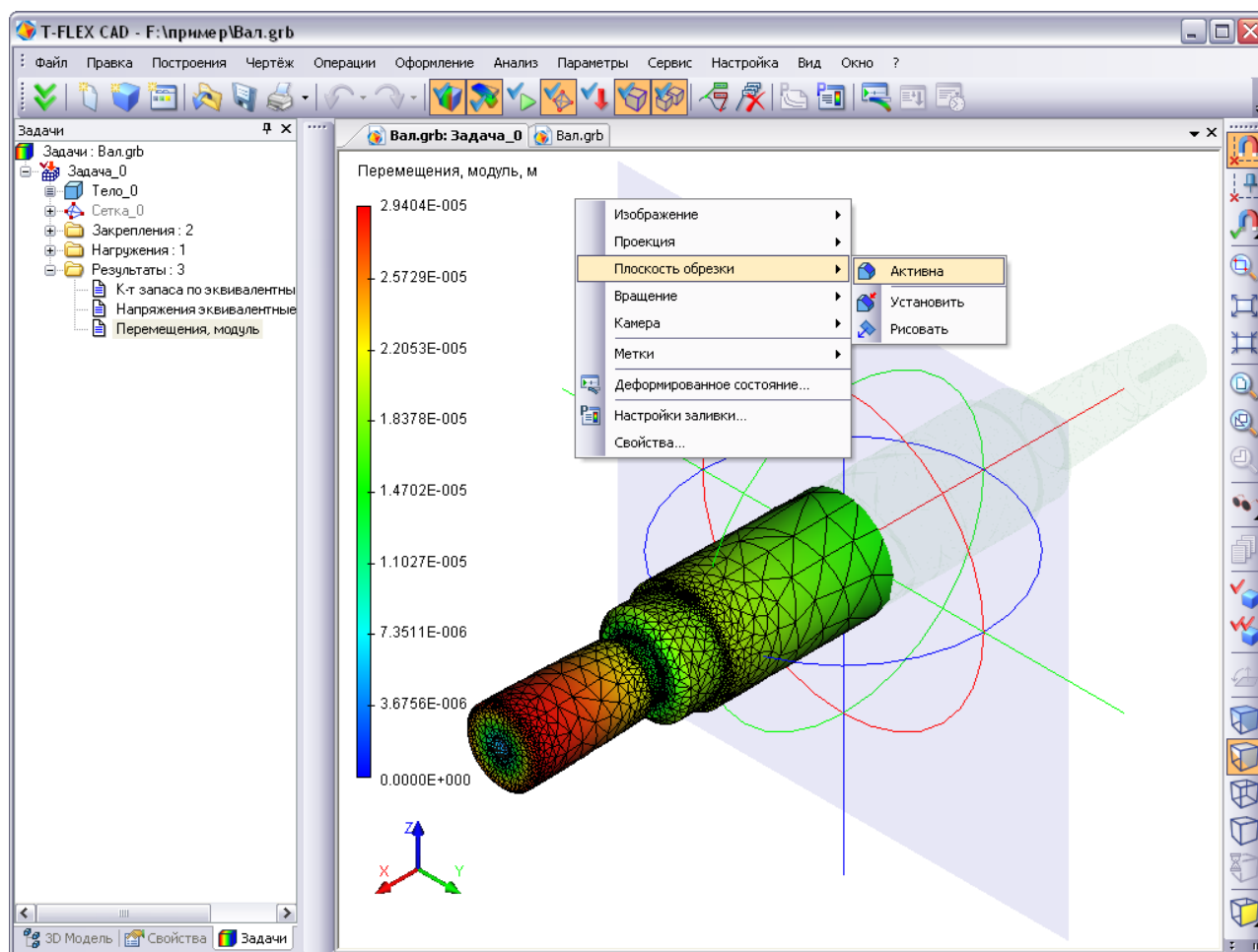
## Построение сечений

В T-FLEX Анализ существует возможность построения сечений конечно-элементной сетки некоторой заданной пользователем плоскостью.







Сечение конечно-элементной сетки плоскостью можно построить только в том случае, если успешно выполнен расчёт задачи конечно-элементного анализа.

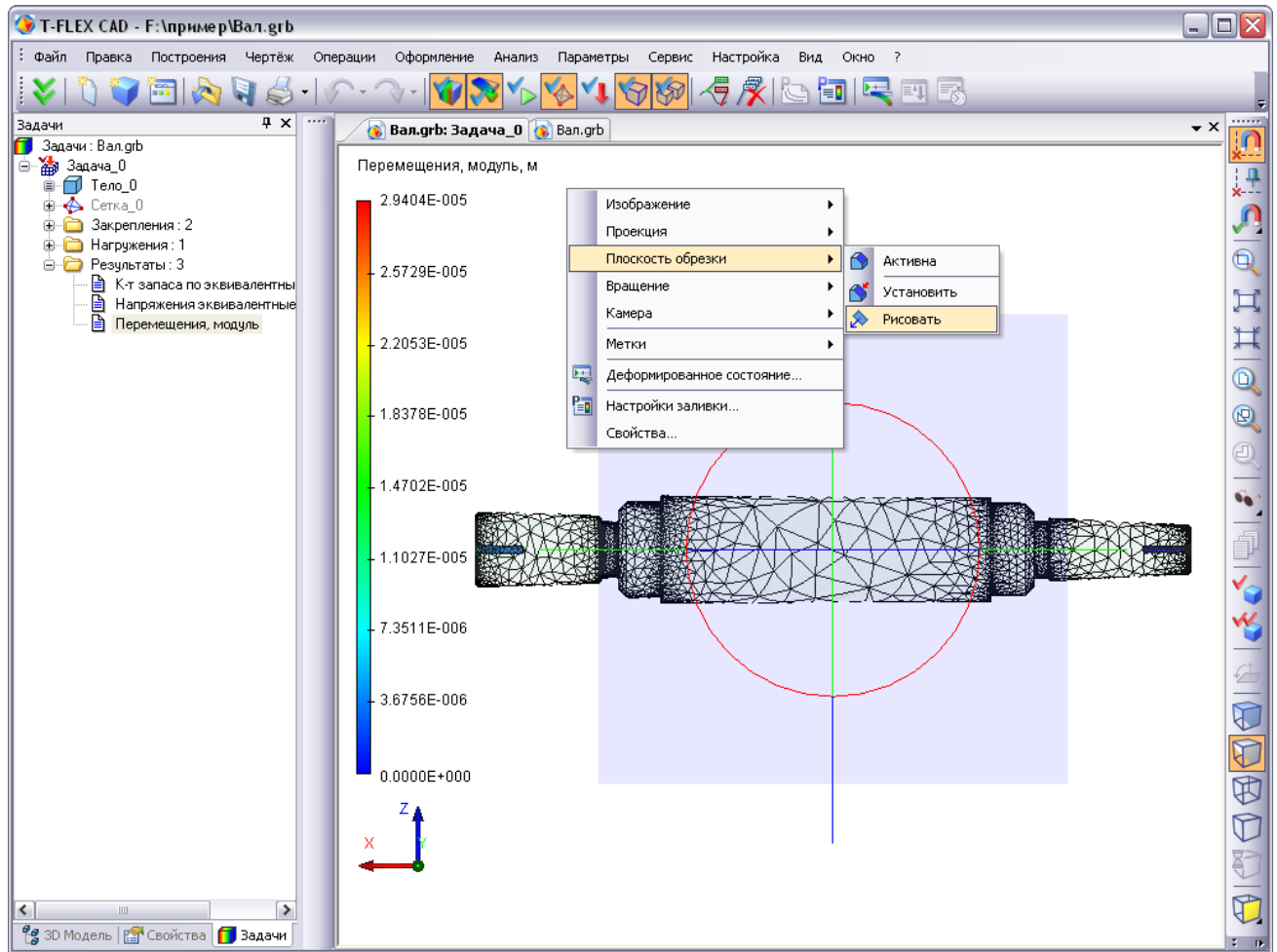
Для того чтобы построить сечение, необходимо из контекстного меню, вызываемого нажатием правой кнопки мыши в окне просмотра результатов расчёта, выбрать команду **«Плоскость обрезки|Активна»**.



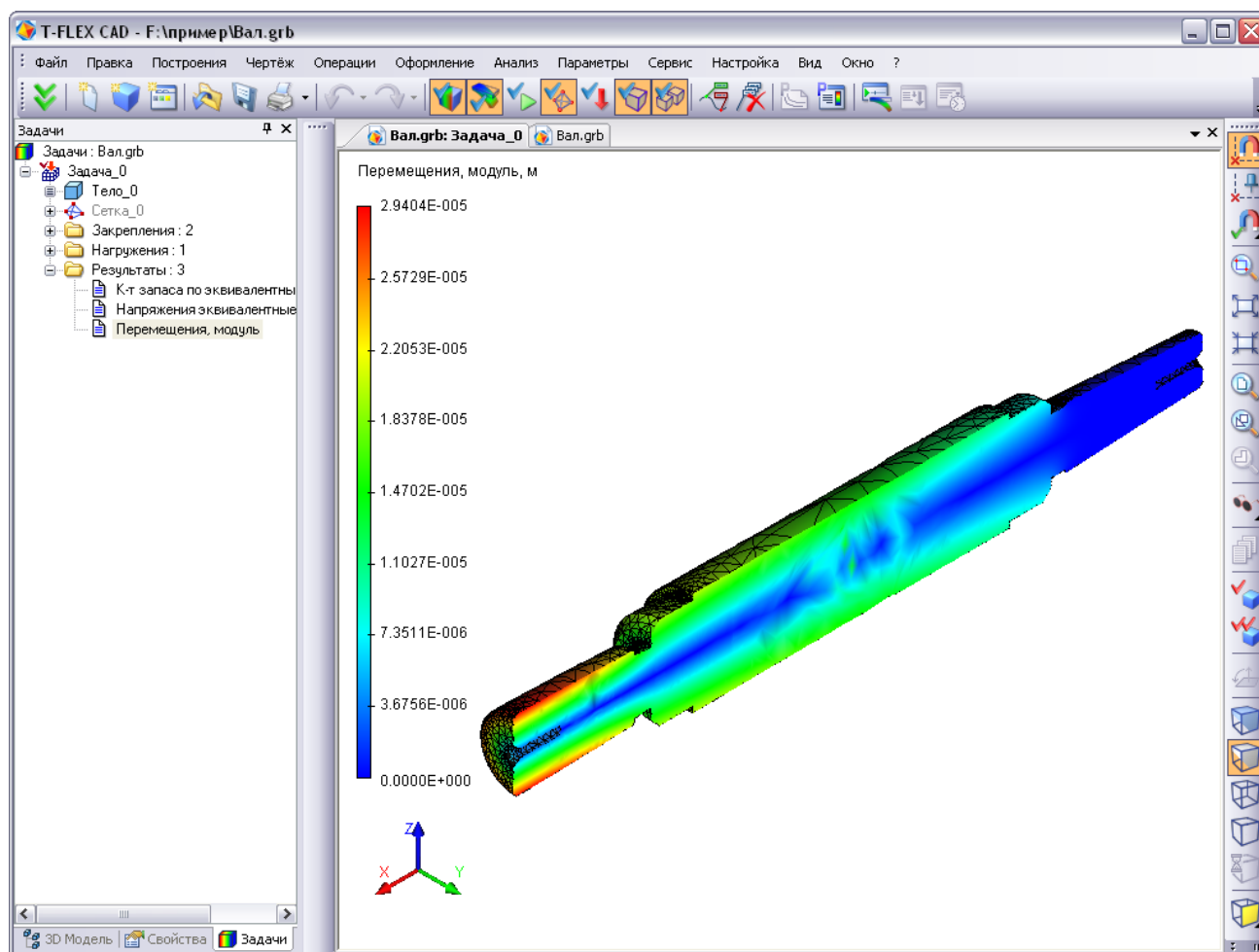


Затем следует установить плоскость сечения в требуемое положение.

Для вращения плоскости относительно осей локальной системы координат (ЛСК) плоскости служат управляющие объекты: , , . Для перемещения плоскости вдоль осей ЛСК служат управляющие объекты: , , . Цвет каждого из объектов соответствует цвету осей (OX,OY,OZ) ЛСК плоскости. Первоначально оси локальной системы координат плоскости сонаправлены осям глобальной системы координат.




После того как установлена плоскость сечения, необходимо вновь нажатием правой кнопки мыши в окне просмотра результатов расчёта вызвать контекстное меню и выбрать команду **«Плоскость обрезки|Рисовать»**. Плоскость сечения будет построена.



Возможность построить сечение конечно-элементной сетки плоскостью очень важна в том случае, когда пользователю необходимо знать поведение решения внутри конструкции.

## Генерация отчётов

Пользователь может создавать независимые от T-FLEX Анализа электронные документы, содержащие основные сведения о рассчитанной задаче. Отчёт формируется в html-формате и его просмотр возможен в любом просмотрщике, например, MS Internet Explorer или MS Word. Для создания отчёта активной задачи используется команда **«Анализ|Отчёт...»**.


Вызов диалога настройки отчёта также возможен из контекстного меню по нажатию  на имени выбранной задачи (команда **«Отчёт...»**).

Отчёт содержит основные сведения о модели, материалах, расчётной конечно-элементной сетке, а также цветные эпюры результатов, которые отображаются в данный момент в дереве задач или открыты в окнах просмотра результатов расчёта.

Рассмотрим основные элементы управления диалога создания отчёта.


Группа **“Общая информация”** содержит данные о названии задачи, для которой формируется отчёт (**“Название”**), сведения о создателе отчёта (**“Автор”** - по умолчанию информация берётся из свойств документа), сведения о компании также по умолчанию берутся из свойств документа.

Элемент управления **“Список эпюр”** позволяет отметить галочками виды результатов, графические изображения которых будут добавлены в формируемый отчёт.

Рядом со списком эпюр имеется кнопка **[Параметры]**, при помощи которой можно вызвать диалог для задания параметров изображения эпюр. Здесь можно задать размер картинки в пикселях и цвет фона. Также можно включить создание предварительного просмотра и настроить его изображение. При этом в главный документ отчёта включаются уменьшенные изображения эпюр результатов, а доступ к полным изображениям осуществляется кликом  на уменьшенном изображении при просмотре файла отчёта, например, в Internet Explorer.

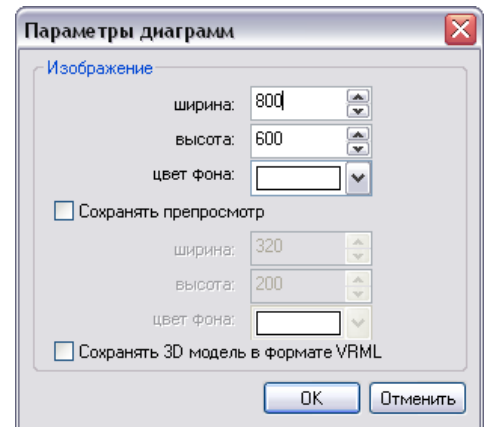
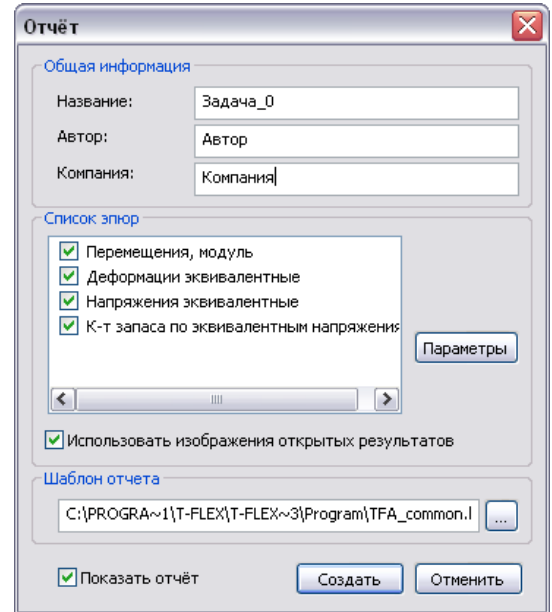
Флажок **“Сохранять 3D модель в формате VRML”** создаст дополнительно к картинкам также трёхмерные модели результатов в формате vrml с цветовой окраской и граничными условиями. В отчете рядом с картинкой будет доступна ссылка на vrml-модель соответствующего результата. Отметим, что для просмотра vrml-модели в Internet Explorer необходимо использовать независимый plugin, отображающий vrml-модели (например, Cortona VrmI Client, <http://www.cortona3d.com> или другой аналог).

Флажок **«Использовать изображение открытых результатов»** позволяет перенести в отчёт изображения открытых в данный момент эпюр в текущих ракурсах, как они выглядят в окне результатов расчёта. Если открытых окон с результатами нет, или элемент управления не активен, то эпюры помещаются в отчёт с ориентацией по умолчанию (**«аксонометрия вид спереди»**).

**Шаблон отчёта** – указывает путь к html-документу с прототипом отчёта. Нажатие на кнопку  позволяет выбрать другой шаблон отчёта.

Нажатие на кнопку **[Создать]** приводит к появлению диалога сохранения файла отчёта. По умолчанию отчёт сохраняется в текущем каталоге файла модели и имеет наименование «имя файла модели-название задачи».html.

При генерации отчёта создаётся одноименная папка с файлами графических изображений результатов в формате .bmp. Данное обстоятельство необходимо учитывать при переносе отчёта на другое рабочее место или при передаче стороннему заказчику.



## Шаблоны отчётов

Как уже упоминалось, отчёты о задачах формируются с помощью шаблонов. Шаблон представляет собой обычный html-документ. Шаблон, который поставляется с системой, имеет имя TFA\_common.html и по умолчанию располагается в папке program инсталляции T-FLEX CAD. Содержимое шаблона доступно для редактирования в текстовом или html-редакторе. Пользователь, знакомый с html-программированием, может внести изменения стандартный шаблон, или на его основе сделать свой собственный, а затем использовать новый шаблон для генерации отчётов по задачам. Принцип формирования отчёта по шаблону прост. Генератор отчёта просматривает текст шаблона и анализирует его содержимое. В полях шаблона, где встречаются специальные условные обозначения (т.н. «тэги»), эти тэги заменяются на соответствующие значения свойств задачи, для которой формируется отчёт. В Таблице 1 приводится список тэгов и их значений в шаблоне отчёта.

## Перечень тэгов для формирования отчётов

Таблица 1

Тэг	Значение тэга
\$(TaskName)	Название задачи
\$(TaskComment)	Комментарий к задаче, задаваемый в диалоге свойств задачи
\$(TaskType)	Тип задачи
\$(TaskAuthor)	Автор
\$(TaskCompany)	Организация
\$(Date)	Дата и время генерации отчета
\$(File)	Имя и путь к файлу модели
\$(SolidName)	Имя операции, для которой создана задача
\$(MaterialNumber)	Порядковый номер материала
\$(MaterialElasticity)	Модуль упругости
\$(MaterialPuasson)	Коэффициент Пуассона
\$(MaterialDensity)	Плотность
\$(MaterialThermalCond)	Теплопроводность
\$(MaterialExpansion)	Коэффициент линейного расширения
\$(MaterialStress)	Допустимое напряжение
\$(MaterialSpecificHeat)	Удельная теплоемкость
\$(MeshName)	Номер сетки
\$(MeshType)	Тип элемента
\$(MeshNodesNum)	Количество узлов
\$(MeshElementsNum)	Количество элементов
\$(ConditionName)	Имя (номер) граничного условия

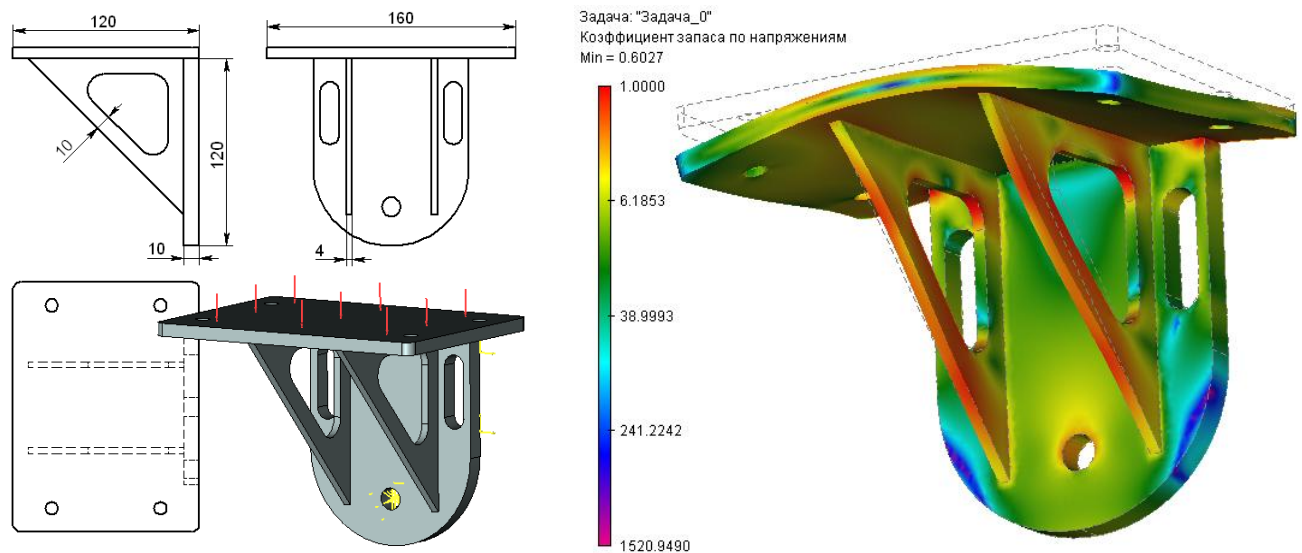
\$(ConditionParent)	Элемент модели, для которого создано граничное условие
\$(ConditionParameters)	Значение граничного условия (нагрузка, температура и т.п.)
\$(HTML_TR.Result)	Результаты
\$(ResultName)	Наименование результата
../..../\$(ResultBitmap)	Ссылка на изображение результата

Пример интерпретации результата

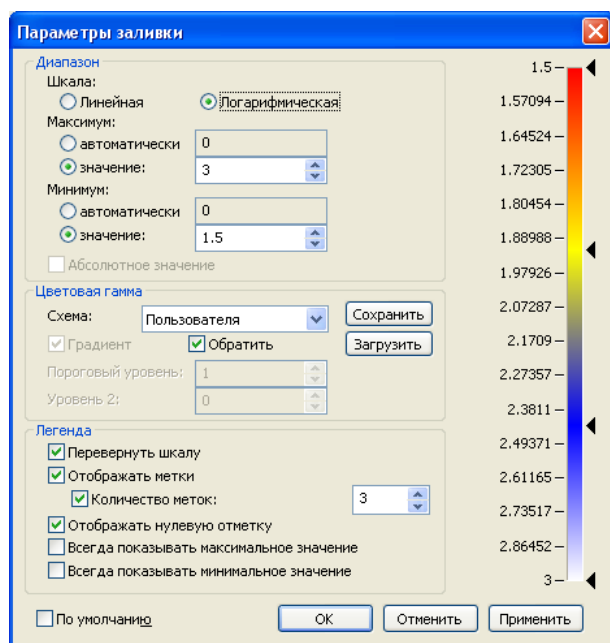
В этом параграфе мы рассмотрим пример детальной интерпретации результатов конкретного прочностного расчёта и выполним необходимые мероприятия по устранению недостатков модели.

Исходная модель представляет собой кронштейн, чертёж которого представлен ниже. Кронштейн нагружается силой 3500кг, которая равномерно распределена по горизонтальной плите. Материал модели – сталь. Имеется два закрепления: полное закрепление в нижнем отверстии, и частичное закрепление с запретом перемещений по продольной оси – для вертикальной плиты

Основным критерием для оценки прочности конструкции, как уже говорилось, является коэффициент запаса по напряжениям (КЗ). Минимальное значение КЗ для нашей детали должно быть не менее 1,5. После получения первых результатов можно увидеть общую картину распределения коэффициента, показанную справа на цветовой эпюре.



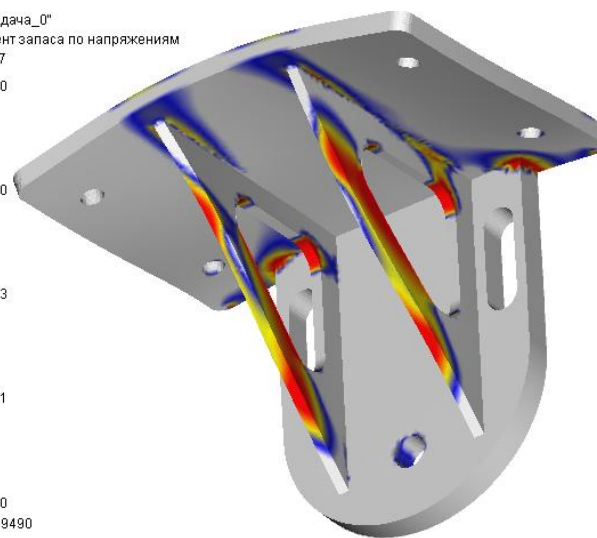
В данном случае нас интересуют зоны, в которых КЗ приближается к критическим значениям. Мы можем просканировать модель при помощи курсора, наводя его на интересующие места и получая ответ в виде всплывающей подсказки. Но для более наглядного просмотра таких зон нужно настроить цветовую шкалу, как показано на следующем рисунке.



Задача: "Задача\_0"  
Коэффициент запаса по напряжениям  
Min = 0.6027

1.5000  
1.57094  
1.64524  
1.72305  
1.80454  
1.88988  
1.97926  
2.07287  
2.1709  
2.27357  
2.3811  
2.49371  
2.61165  
2.73517  
2.86452  
3

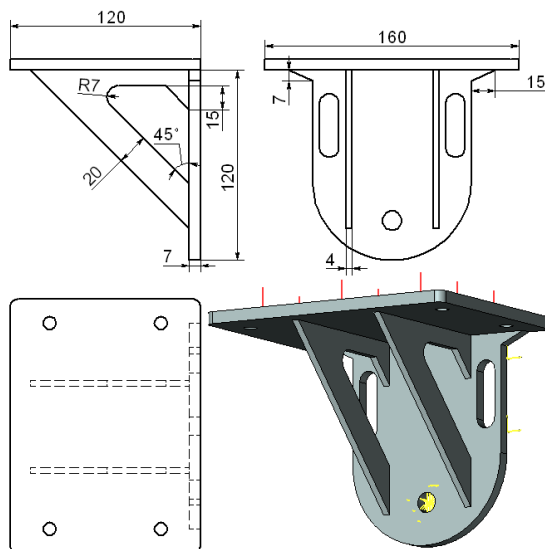
1.5000  
1.7830  
2.1193  
2.5191  
3.0000  
Max = 1520.9490



Устанавливается диапазон интересующих нас значений от 1.5 до 3. Корректируем для удобства цветовые значения. Все, что больше 3-х, будет отображаться белым цветом – нас эти зоны пока не интересуют. Критические зоны со значением менее 1.5 будут красными. Остальные значения диапазона будут иметь цвет в соответствии с настройками цветовой шкалы.

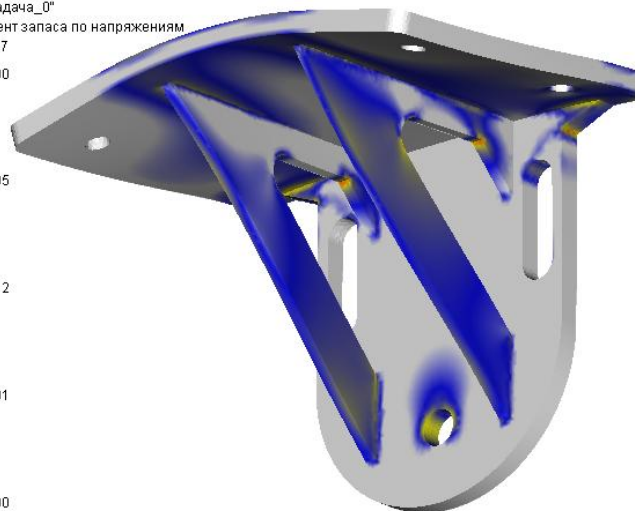
При таком отображении результата сразу становятся видны места модели, требующие усиления. Также на шкале значений мы видим, что минимальное значение КЗ равно 0.6, что не допустимо.

Далее устраняем недостатки модели. В первую очередь усиливаем подкосы, увеличивая сечение и места соединения вертикальной и горизонтальной плит. Также при анализе общей картины распределения коэффициента запаса можно обнаружить зоны с избыточной прочностью. Это позволяет экономить материал. Так, можно уменьшить толщину вертикальной плиты и убрать на ней рёбра жесткости. Чертёж нового кронштейна приведен ниже.



Задача: "Задача\_0"  
Коэффициент запаса по напряжениям  
Min = 1.4927

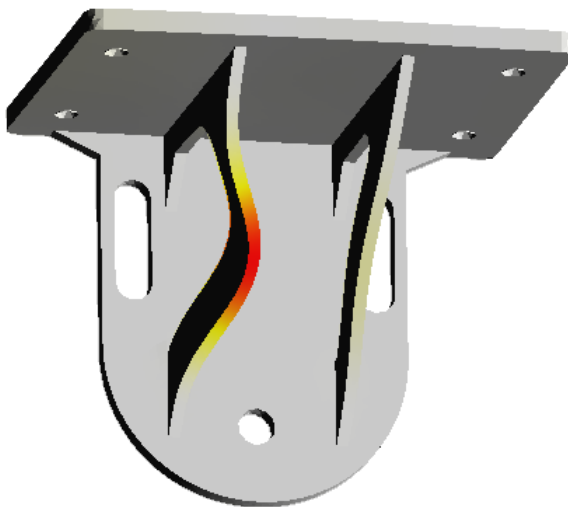
1.0000  
1.4905  
2.2312  
3.3401  
5.0000  
Max = 2562.6631



После обновления сетки и выполнения повторного расчета видно, что коэффициент запаса в «проблемных» зонах теперь не принимает критических значений.

Для вынесения окончательного решения о прочности кронштейна необходимо выполнить расчёт детали на устойчивость. Этот расчёт показывает, что при данном нагружении для 1 формы коэффициент критической нагрузки составляет 79, что говорит о достаточном запасе устойчивости конструкции.

Задача: "Задача\_1"  
Относительные перемещения, модуль  
Форма 1 - коэффициент критической нагрузки: 78.93





## СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Основная цель статического прочностного анализа конструкций заключается в оценке напряжённого состояния конструкции, находящейся под действием не изменяющихся во времени (статических) силовых воздействий. Эта оценка напряжённого состояния выполняется обычно с целью проверки принятых конструкторских решений на условие прочности. Условие прочности в общем случае формулируется следующим образом:

*Напряжения  $\sigma$ , возникающие в конструкции под действием приложенных к ней внешних сил, должны быть меньше допускаемых напряжений  $[\sigma]$  для данного конструкционного материала с учётом поправочного коэффициента запаса  $K_{\text{зап}}$  по прочности.*

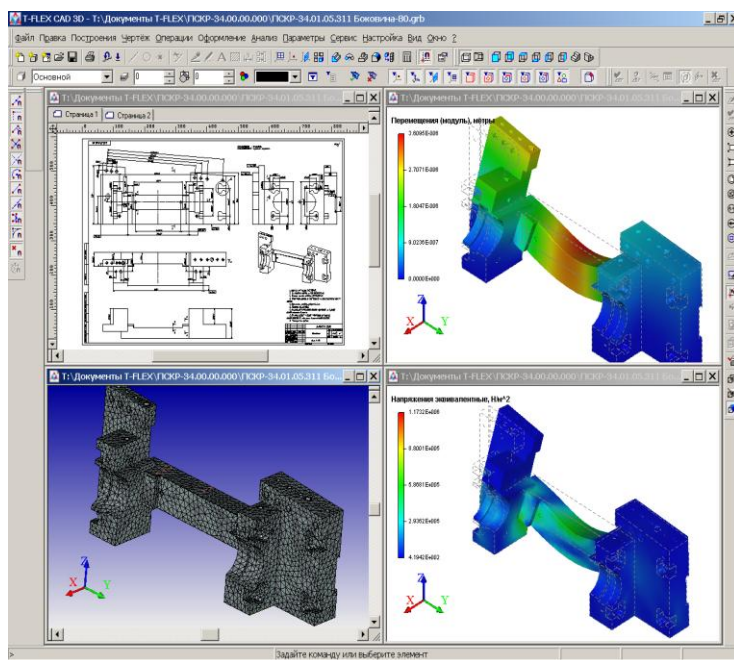
$$\sigma \cdot K_{\text{зап}} \leq [\sigma]$$

Модуль статического анализа системы конечно-элементного моделирования T-FLEX Анализ предназначен для расчёта статического напряжённого состояния объёмных конструкций в среде T-FLEX CAD. Модуль статического анализа работает непосредственно с трёхмерными моделями T-FLEX CAD и не требует отдельных построений для расчёта специальной трёхмерной модели.

Основными результатами статических расчётов являются:

- поля перемещений конструкции в расчётных точках конечно-элементной сетки;
- поля относительных деформаций;
- поля компонентов напряжений;
- энергия деформаций;
- узловые усилия;
- поля распределения коэффициента запаса по напряжениям по объёму конструкции;

Этих данных обычно достаточно для прогнозирования поведения конструкции и принятия решений для оптимизации геометрической формы изделия с целью обеспечения основных условий прочности изделий.




## Особенности этапов статического анализа

Статический анализ модели осуществляется в несколько этапов. Перечислим необходимые для выполнения анализа элементы. Для осуществления статических расчётов необходимо выполнить следующие шаги:

**Шаг 1. Создание объёмной твердотельной модели изделия.** Перед началом работы в системе T-FLEX Анализа пользователь должен подготовить твердотельную трёхмерную модель, которую он будет рассчитывать. Твердотельная модель может быть построена в среде T-FLEX CAD или импортирована из других систем. Статические расчёты могут выполняться над одной или несколькими операциями-телами.

**Шаг 2. Создание «Задачи».** «Задача» создаётся с помощью команды:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<3MN>	«Анализ Новая задача Конечно-элементный анализ»	

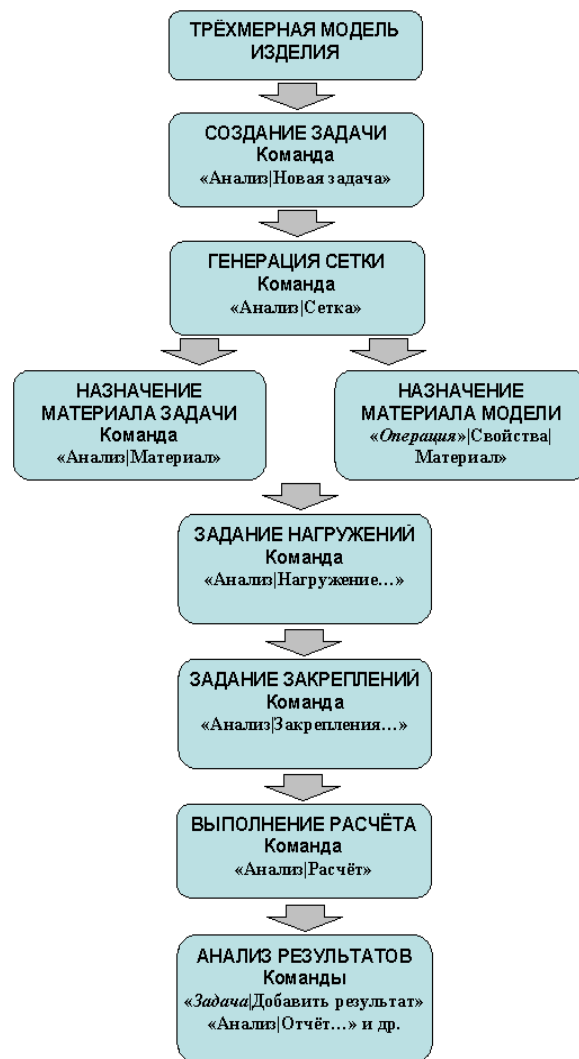
Для осуществления статического расчёта при создании задачи пользователь указывает её тип – «Статический анализ» в окне свойств команды. Если в сцене присутствует несколько тел, необходимо выбрать одно или несколько соприкасающихся тел, для которых будет создана новая задача.

**Шаг 3. Задание материала.** Одним из обязательных элементов любого расчёта является материал задачи. Подробное описание способов задания материалов для расчёта приводится в соответствующем разделе описания препроцессора.

**Шаг 4. Создание сетки.** Для осуществления конечно-элементного моделирования необходимо построение конечно-элементной сетки. По умолчанию, команда построения такой сетки инициируется автоматически при создании задачи. Пользователь может также создать сетку, используя команду T-FLEX Анализа «Анализ|Сетка». При создании сетки пользователь определяет различные параметры дискретизации твердотельной модели. Конечно-элементная сетка существенным образом может влиять на качество получаемых решений в случае сложной пространственной конфигурации изделий. Подробно параметры управления генерацией конечно-элементной сетки рассматриваются в соответствующем разделе описания препроцессора T-FLEX Анализа.

**Шаг 5. Наложение граничных условий.** В статическом анализе роль граничных условий выполняют закрепления и приложенные к системе внешние нагрузки. Этап задания граничных условий очень ответственный и требует хорошего понимания расчётчиком сути решаемой задачи. Поэтому, прежде чем приступить к наложению граничных условий, следует хорошо продумать физическую сторону задачи.

### АЛГОРИТМ СТАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

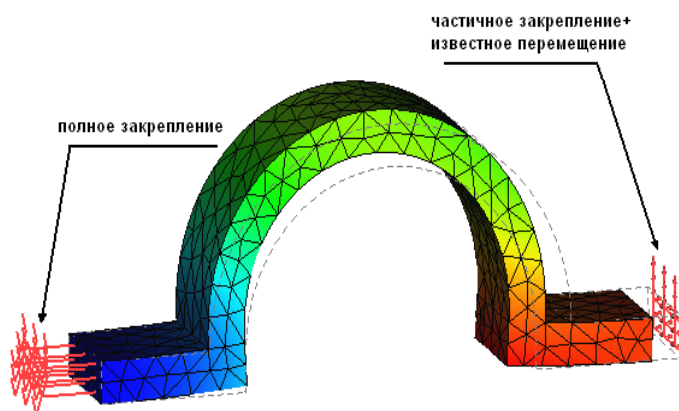
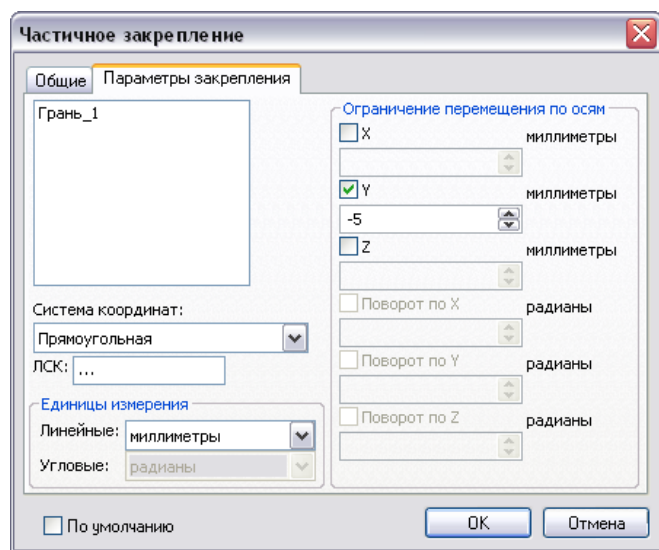


Задание закреплений является обязательным условием выполнения корректного статического расчёта. Суммарно наложенные на перемещение тела ограничения должны удовлетворять следующему условию:

Для обеспечения статического анализа модель должна иметь закрепление, исключающее её свободное перемещение в пространстве как твёрдого тела. Невыполнение этого условия приведёт к неверным результатам конечно-элементного моделирования или срыву вычислительного процесса.

Для задания закреплений в T-FLEX Анализе предусмотрены две команды: **«Полное закрепление»** и **«Частичное закрепление»**. Команда **«Полное закрепление»** определяет для выбранного элемента модели полностью неподвижное (фиксированное) состояние. Команда **«Частичное закрепление»** позволяет ограничить перемещение элементов модели избирательно по осям выбранной системы координат.

Команда «Частичное закрепление» обладает ещё одним полезным функционалом. Пользователь может задать для конструкции известное значение перемещения, например, известную предварительную деформацию конструкции. Для этого в окне свойств команды «Частичное закрепление» необходимо указать значение фиксированного перемещения элемента модели по какой-либо из координатных осей. Статический анализ будет выполнен с учётом этого условия. Отметим, что в этом случае, возможно осуществление статического расчёта без наложения дополнительных (силовых) нагрузок. Таким образом, можно оценить напряжения, возникающие в деформированной конструкции, если известны количественные значения этих деформаций (перемещений).




Пример использования известных перемещений

Для задания нагрузок в T-FLEX Анализе предусмотрен набор специализированных команд, позволяющих задать основные виды нагрузок (**«Сила»**, **«Давление»**, **«Вращение»**, **«Ускорение»**, **«Цилиндрическая нагрузка»**, **«Крутящий момент»**). Подробное описание всех типов нагрузок содержится в главе с описанием препроцессора.


Отметим ещё одну функциональную возможность статических расчётов T-FLEX Анализа. Пользователь может задать расчёт напряжённого состояния конструкции, возникающий под действием не только различных силовых, но и температурных нагрузок – задача «термоупругости».


Известно, что под действием температур конструкционные материалы испытывают линейные деформации - расширяются при нагревании и сужаются при охлаждении. Изменение размеров тела приводит к деформациям и появлению напряжённого состояния. T-FLEX Анализ позволяет учесть влияние перепада температур. Задать температуру для учёта неравномерных температурных полей можно с помощью команды:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<ЗТТ>	«Анализ Тепловые нагрузки Температура»	

Вместе с тем, чтобы температурные нагрузки учитывались в статическом расчёте, необходимо включить режим **«Учитывать термоэффекты»** на закладке **[Термоупругость]** диалога параметров статической задачи. Также понадобится определить температуру «нулевых» деформаций, соответствующую ненапряжённому состоянию модели и определить рабочее температурное поле (подробнее в разделе «Настройки процессора линейной статики»).

**Шаг 6. Выполнение расчёта.** После того как для модели была построена конечно-элементная сетка и наложены граничные условия (закрепления и нагружения), можно запустить процесс формирования и решения линейных алгебраических уравнений статического анализа. Для запуска расчёта *активной* задачи можно использовать команду:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<ЗМУ>	«Анализ Расчёт»	

Расчёт выбранной задачи можно также запустить из контекстного меню по нажатию  на имени выбранной задачи в дереве задач.

По умолчанию, перед расчётом открывается диалог «Параметров задачи» статического анализа. В данном диалоге пользователь может установить требуемые режимы и настройки расчёта, а также задать отображаемые в дереве задач типы результатов. Подробное описание назначения настроек задачи рассмотрено далее в разделе «Настройки Процессора линейной статики». Большинство режимов выбираются процессором автоматически в зависимости от размерности решаемой задачи и наложенных граничных условий.

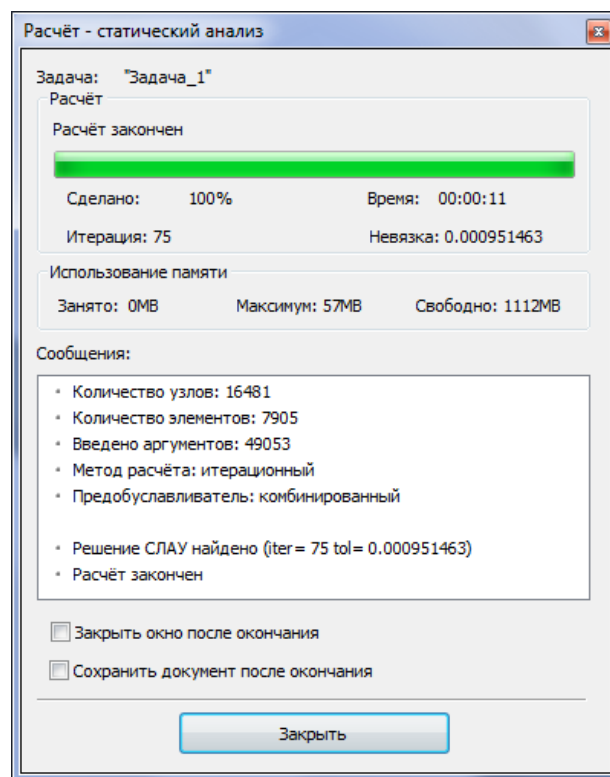
Нажатие кнопки **[ОК]** диалога параметров задачи запускает процесс формирования и решения систем линейных алгебраических уравнений. Этапы решения уравнений и дополнительная справочная информация отображаются в специальном информационном окне. Нажатие кнопки **[Закрыть]** в информационном окне приводит к прекращению расчёта.

Флажок **«Закрыть окно после окончания расчёта»** приведёт к автоматическому закрытию окна отображения этапов расчёта после завершения решения уравнений.

Флажок **«Сохранить документ после окончания расчёта»** приведёт к автоматическому сохранению результатов расчёта и всех изменённых данных рабочего документа.

В информационное окно выводятся следующие справочные данные:

**Количество узлов** – количество узлов расчётной конечно-элементной сетки.



**Количество элементов** – количество тетраэдров в конечно-элементной сетке.

**Введено аргументов** – количество уравнений линейной статики.

**Метод расчёта** – используемый для решения уравнений алгоритм. Виды возможных алгоритмов и их использование описаны в разделе «Настройки Процессора линейной статики».

**Решение СЛАУ найдено** – символизирует о том, что процесс решения завершился успешно. В скобках указывается дополнительная информация: **iter** – количество выполненных итераций (при использовании итерационного метода решения СЛАУ), **tol** – достигнутая в результате решения уравнений погрешность.

Этапы расчёта также отображаются наглядно в виде динамически меняющейся шкалы. В группе **Использование памяти** отображается текущее состояние памяти и по нему можно судить о пригодности используемого компьютера для решения больших задач. Поле «Занято» показывает, сколько оперативной памяти занято в текущий момент (включая своп). Поле «Максимум» – пиковое значение, достигнутое за время решения. Поле «Свободно» – размер свободной физической оперативной памяти. Если значение упало до нуля, тогда используется своп. Кроме того, показывается время, прошедшее с момента начала расчёта и процент решения текущей итерации. После завершения расчёта пользователь должен закрыть дополнительное окно (если не включен режим автоматического закрытия).

**Шаг 7. Анализ результатов статического расчёта.** После выполнения расчёта, в дереве задач появляется новая папка «Результаты». По умолчанию в ней отображаются результаты, определённые в закладке «Результаты» диалога «Параметры задачи». Всего по результатам статического анализа пользователю доступны 38 результатов, сгруппированные в 6 групп.

**Группа «Перемещения».** Включает в себя следующие результаты:

$\Delta_x$  - компонента вектора узловых перемещений конечно-элементной сетки в направлении оси  $OX$  глобальной системы координат

$\Delta_y$  - компонента вектора узловых перемещений конечно-элементной сетки в направлении оси  $OY$  глобальной системы координат

$\Delta_z$  - компонента вектора узловых перемещений конечно-элементной сетки в направлении оси  $OZ$  глобальной системы координат

Перемещения, модуль - значение абсолютных перемещений модели в узлах, определяемое для каждого узла по формуле:  $\Delta = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ , где  $x, y, z$  - компоненты вектора перемещений  $i$ -го узла конечно-элементной сетки.

**Группа «Напряжения»** включает в себя результаты:

$\sigma_{\text{экв}}$  - относительные эквивалентные напряжения, вычисляемые из компонентов тензора

напряжений по формуле:  $\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}$

$\sigma_x$  - напряжение в направлении оси  $OX$  глобальной системы координат

$\sigma_y$  - напряжение в направлении оси  $OY$  глобальной системы координат

$\sigma_z$  - напряжение в направлении оси  $OZ$  глобальной системы координат

$\tau_{xy}$  - напряжение в направлении оси  $OY$  глобальной системы координат, действующее на площадке с нормалью параллельной оси  $OX$

$\tau_{xz}$  - напряжение в направлении оси  $OZ$  глобальной системы координат, действующее на площадке с нормалью параллельной оси  $OX$

$\tau_{yz}$  - напряжение в направлении оси  $OZ$  глобальной системы координат, действующее на площадке с нормалью параллельной оси  $OY$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - главные напряжения ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ).

**Интенсивность напряжений** определяется следующим образом:

$$\sigma_I = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|)$$

**Группа «Коэффициент запаса по напряжениям»** включает в себя результаты:

**Коэффициент запаса по эквивалентным напряжениям** представляет собой отношение допускаемых напряжений  $[\sigma]$  для данного конструкционного материала к эквивалентным напряжениям:

$$K_{\text{зан}} = \frac{[\sigma]}{\sigma_{\text{экв}}}$$

**Коэффициент запаса по касательным напряжениям** вычисляется следующим образом:

$$K_{\tau} = \frac{[\sigma]}{2 \cdot \tau_{\text{max}}}, \tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

**Коэффициент запаса по нормальным напряжениям** вычисляется следующим образом:

$$K_n = \frac{[\sigma]}{\sigma_1}$$

Допускаемое напряжение материала задаётся в характеристиках материала в стандартной библиотеке T-FLEX CAD или в соответствующем поле библиотеки материалов задачи. В качестве допускаемого напряжения для пластичных материалов выбирается предел текучести.

**Группа «Деформации»** включает в себя результаты:

$\varepsilon_{\text{экв}}$  - относительные эквивалентные деформации, вычисляемые из компонентов тензора деформаций по формуле:

$$\varepsilon_{\text{экв}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2)}{2} + \frac{3(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)}{4}}$$

$\varepsilon_x$  - относительная линейная деформация в направлении оси  $OX$  глобальной системы координат

$\varepsilon_y$  - относительная линейная деформация в направлении оси  $OY$  глобальной системы координат

$\varepsilon_z$  - относительная линейная деформация в направлении оси  $OZ$  глобальной системы координат

$\gamma_{xy}$  - угловая деформация в плоскости  $OXY$

$\gamma_{xz}$  - угловая деформация в плоскости  $OXZ$

$\gamma_{yz}$  - угловая деформация в плоскости  $OYZ$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  - главные деформации ( $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ ).

**Плотность энергии деформации.** Результат отображает распределение энергии деформаций по объёму модели.

**Группа «Реакции».** Результат отображает усилия, возникающие в опорных (закрепленных) узлах конечно-элементной модели.

$F_x$  - сила реакции в направлении оси  $OX$  глобальной системы координат

$F_y$  - сила реакции в направлении оси  $OY$  глобальной системы координат

$F_z$  - сила реакции в направлении оси  $OZ$  глобальной системы координат

**Сила реакции (модуль)** - значение абсолютных усилий модели в узлах, определяемое как  $F_{m_i} = \sqrt{F_{x_i}^2 + F_{y_i}^2 + F_{z_i}^2}$  для каждого узла, где  $F_{x_i}$  -  $x$ -компонента,  $F_{y_i}$  -  $y$ -компонента,  $F_{z_i}$  -  $z$ -компонента вектора усилий  $i$ -го узла конечно-элементной сетки.

**Группа «Нагрузки»** отображает приложенные к конечно-элементной модели и приведённые к узлам нагрузки. Этот тип данных представляет собой справочную информацию.

**Температура.** Результат отображает распределение поля температур по объёму модели.

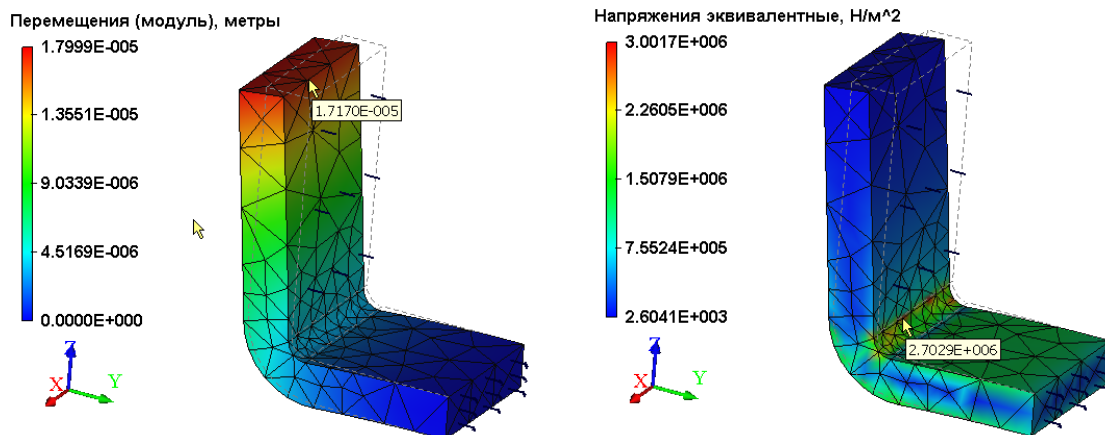
### Алгоритм оценки статической прочности по результатам моделирования

После успешного расчёта задачи необходимо проанализировать полученные результаты, чтобы сделать заключение о вероятной статической прочности конструкции. В большинстве случаев для этого достаточно трёх типов результатов – перемещений, напряжений и коэффициента запаса по напряжениям. Примерная последовательность действий по оценке результатов конечно-элементного моделирования:

1. **Анализ перемещений.** В дереве задач из контекстного меню по команде **«Открыть»** или **«Открыть в новом окне»** открываем результат **«Перемещения, модуль»**. Визуально оцениваем характер и амплитуды деформированного состояния конструкции. Перемещения необходимо контролировать для того, чтобы проверить правильность приложенных нагрузок и убедиться, что в результате решения систем уравнений было найдено корректное решение. Если



результаты анализа перемещений показывают, что решение задачи найдено и характер деформированного состояния конструкции соответствует ожидаемому, можно перейти к следующему шагу.



Эпюры модуля перемещений и эквивалентных напряжений

2. **Анализ напряжений.** Открываем результат «**Напряжения эквивалентные**». Визуально оцениваем характер рассчитанных эквивалентных напряжений. Градиенты напряжений отображаются цветовыми переходами. Шкала цветовых значений, отображаемая в окне просмотра результатов расчёта, позволяет определить ориентировочное значение отображаемого результата. Если навести курсор мыши на интересующее место модели, то появляется всплывающая подсказка, содержащая интерполированное по ближайшим узлам значение отображаемой величины непосредственно под курсором мыши. По результату «Эквивалентные напряжения» пользователь может сделать следующие заключения:
  - а) Определить, в каких местах и элементах конструкции возникают наибольшие напряжения;
  - б) Сравнивая максимумы расчётных напряжений с допускаемыми для материала модели напряжениями, можно оценить степень прочности конструкции.
3. **Оценка запаса прочности.** Открываем результат «**Коэффициент запаса по эквивалентным напряжениям**». Данный результат позволяет оценить количественное отношение допускаемых напряжений, указанных в характеристиках материала, к рассчитанным эквивалентным. По умолчанию результат отображается в логарифмическом масштабе шкалы с целью уменьшения разброса цветовых градиентов. Если отношение допускаемого и расчётного напряжений приближается к единице, или меньше её, условие прочности перестаёт выполняться и, следовательно, в конструкцию необходимо вносить изменения.

## Настройки процессора линейной и нелинейной статики

Свойства задачи, определённые пользователем, сохраняются при сохранении документа, а также наследуются при копировании задачи. Основное назначение свойств задачи – задание требуемых для работы процессора режимов, списков отображаемых после расчёта в дереве задач результатов, а также хранение описательных атрибутов задачи, таких как имя или комментарий. Диалог параметров задачи статического анализа содержит пять закладок.

Закладка **[Общие]** позволяет определить описательные свойства текущей задачи.

В поле **«Имя»** пользователь может изменить наименование задачи, присвоенное системой по умолчанию при её создании. Это имя будет в дальнейшем отражаться в дереве задач, в окне результатов и в отчёте.

Элемент управления **«Тип»** позволяет устанавливать тип задачи. Отметим, что T-FLEX Анализ поддерживает изменение типа уже существующей задачи на другой, из числа доступных пользователю типов задач. Например, пользователь может создать задачу типа «Статический анализ», а затем изменить её тип, например, на «Устойчивость» или «Частотный анализ».

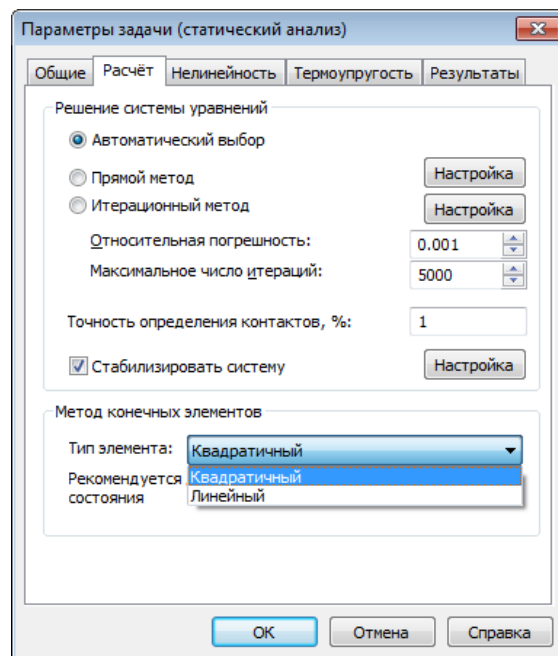
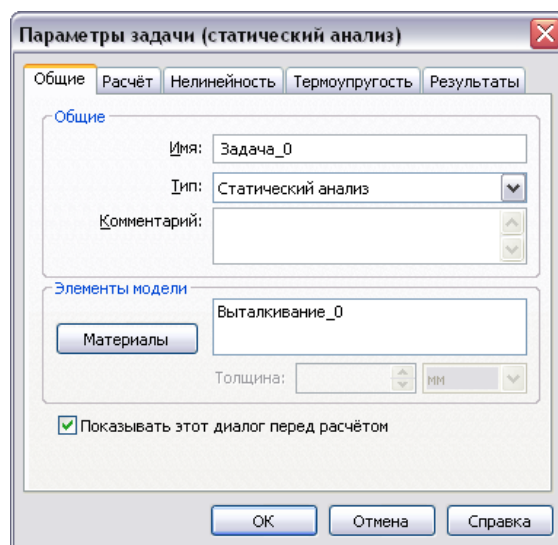
Текстовое поле **«Комментарий»** позволяет пользователю занести произвольную текстовую информацию, относящуюся к текущей задаче. Эта информация будет в дальнейшем использоваться при генерации отчёта по результатам решения задачи.

Закладка **[Расчёт]** позволяет задать свойства процессора для решения уравнений линейной статики.

Элементы управления в группе **«Решение системы»** позволяют пользователю определить способы решения систем алгебраических уравнений линейной статики:

**Прямой метод.** Системы уравнений решаются методом Гаусса, с вычислением треугольного разложения матрицы жесткости. Данный метод эффективен для решения систем уравнений, построенных на основе линейного конечного элемента. В некоторых случаях использование прямых методов оправдано и при расчёте систем на квадратичных конечных элементах. Его можно использовать вместо итерационного, если итерационный алгоритм не сходится к устойчивому решению, или скорость сходимости очень мала (количество итераций составляет несколько тысяч). Такая ситуация может наблюдаться на «тонких» задачах (модель плоская или вытянутая), а также при большом количестве конечных элементов, сильно отличающихся от равнобедренных (когда отношение длин рёбер конечных элементов составляет сотни или тысячи).

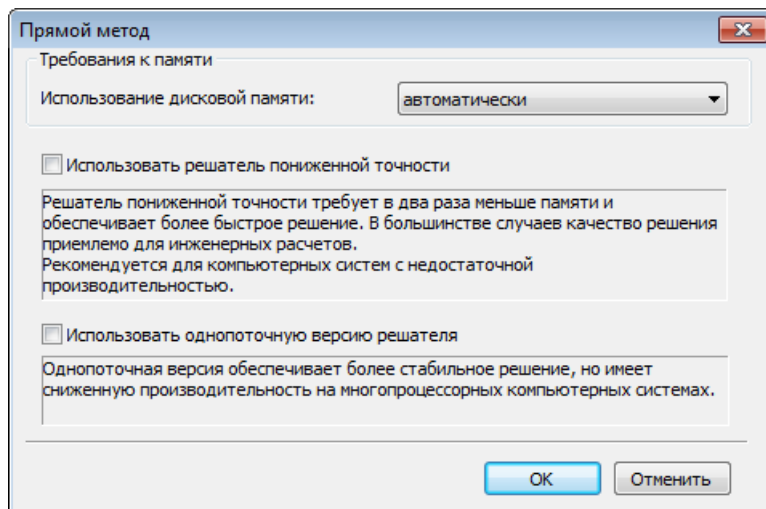
**Итерационный.** Системы уравнений решаются итерационными методами. Этот метод используется по умолчанию для решения систем уравнений, формируемых на основе квадратичного конечного элемента. Для итерационного метода можно установить следующие два параметра: относительная погрешность и максимальное число итераций.



**Относительная погрешность** – погрешность получаемого итерационным методом решения. Чем меньше установленная погрешность, тем большее количество шагов (итераций) необходимо.

**Максимальное число итераций** – предельное количество итераций, по достижении которого решение систем уравнений итерационным методом прекращается, даже если требуемая точность решения не достигнута.

Пользователь может также управлять работой с внешней (дисковой) и оперативной памятью компьютерной системы при решении СЛАУ прямым или итерационным методом ([**Настройка**]).



Диалог настроек прямого метода решения уравнений

Существует три варианта использования дополнительной дисковой памяти: *автоматически, запрещено, принудительно*. Использование дополнительной дисковой памяти позволяет сохранить разложение матрицы жёсткости. Использовать дополнительную дисковую память для решения систем уравнений необходимо только в том случае, если память, необходимая для хранения промежуточных матриц, превышает объём оперативной памяти вычислительной системы. Отметим также, что время решения задач большой размерности с использованием внешней памяти может быть значительным из-за большого количества операций последовательного чтения-сохранения данных.

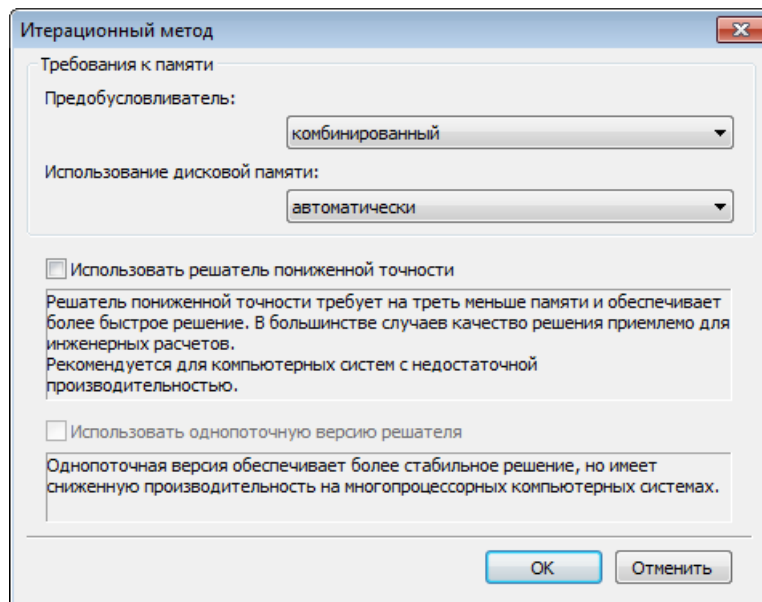
Для хранения промежуточных матриц могут понадобиться значительные объёмы дисковой памяти (несколько Гбайт). Проверьте наличие достаточного объёма свободного места на диске при решении задач большой размерности с использованием внешней памяти.

Если пользователь отключил возможность использования дисковой памяти, но порядок решаемой системы уравнений велик, и память, необходимая для хранения разложения матрицы приближается к 2 Гбайт (для Windows 32-bit), возможен аварийный выход из вычислительного процесса и прекращение решения задачи.

Опция "**Использовать решатель пониженной точности**" включает режим хранения численных данных в 4-х байтном виде (одинарная точность). Потребность в этом может возникнуть, если компьютерная система обладает недостаточным количеством оперативной памяти для решаемой задачи. Системы уравнений в этом режиме обычно решаются несколько быстрее. Однако, из-за сниженной разрядности хранения чисел, в процессе вычислений происходит потеря точности, которая может быть существенной, а может быть и незначительной в зависимости от решаемой задачи. По умолчанию всегда используется 8-байтное хранение численных данных, при котором

погрешности численных округлений обычно заведомо не оказывают влияния на конечный результат.

**Использовать однопоточную версию** - отключает режим распараллеливания вычислительных процессов в процессе решения систем уравнений при решении с пониженной точностью на многопроцессорных (многоядерных) компьютерных системах, что обеспечивает несколько меньшую потерю точности при решении систем уравнений с одинарной точностью.



Диалог настроек итерационного метода решения уравнений

В настройках итерационного метода пользователь может также выбрать "**Предобуславливатель**" для системы уравнений. *Предобуславливанием* называется определенная численная процедура, позволяющая ускорить процесс решения системы уравнений итерационным методом. В T-FLEX Анализе доступны 4-е вида предобуславливателей:

**Комбинированный** (по умолчанию) - обычно обеспечивает самое быстрое решение с минимальным числом итераций, но при этом и самые большие накладные расходы по оперативной памяти для итерационного метода.

**Неполное разложение** - затраты по памяти не превышают удвоенного размера памяти, занятого матрицей жесткости, количество итераций уменьшается, но не так эффективно как в случае с использованием Комбинированного предобуславливателя.

**Диагональный и единичный** - обеспечивают минимальные требования к дополнительной оперативной памяти, но требуют большого количества итераций для решения, обычно редко применяются в практических задачах.

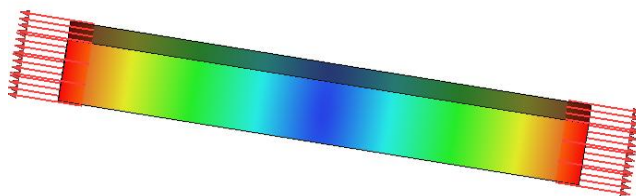
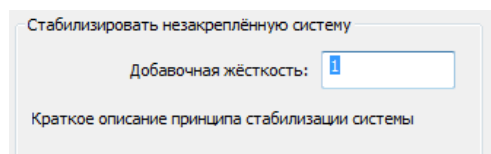
**Метод конечных элементов.** По умолчанию, все расчёты осуществляются с использованием квадратичной аппроксимации перемещений, независимо от того, какая сетка конечных элементов была построена для модели. Если пользователь заинтересован в получении *качественных* результатов, т.е. его интересуют лишь относительные распределения полей напряжений на достаточно подробной сетке, можно использовать расчёт линейным элементом, который осуществляется намного быстрее, чем квадратичным. Гибридный элемент используется при расчёте моделей, состоящих одновременно из линейных пластинчатых и объёмных элементов (т.н. «гибридных моделей»), на статическую прочность.

Расчёт линейным тетраэдральным элементом обеспечивает недостаточную точность количественных результатов. Максимумы перемещений и напряжений при расчёте линейным тетраэдральным конечным элементом значительно меньше значений, получаемых при расчёте более точными методами. Настоятельно рекомендуется для количественной оценки использовать расчёт квадратичным элементом (режим по умолчанию).

**Стабилизировать систему.** Данный режим позволяет осуществлять расчет нефиксированных в пространстве систем, уравниваемых силами. Обычно, если в конечно-элементных расчетах используется модель, не закрепленная в пространстве, т.е. имеющая возможность перемещаться в пространстве как целое, то её конечно-элементный статический анализ не возможен (Очевидно, что незакрепленное тело под действием приложенных сил "улетит" в бесконечность). Опция «Стабилизировать систему» позволяет преодолеть это ограничение в случае, если система уравнивается силами в пространстве. Принцип стабилизации следующий: на все грани модели накладываются эластичные элементы, жесткость которых достаточно мала по сравнению с жесткостью модели и не оказывает существенного влияния на распределение деформаций (а, следовательно, и напряжений).

При этом эластичные элементы предотвращают перемещение модели в пространстве как целого и тем самым делают матрицу жесткости определенной, что позволяет решить конечно-элементную задачу. Следует учесть, что во избежание больших перемещений конечно-элементной модели приложенная система сил должна быть уравнивающейся.

Если все же происходит большое перемещение модели в пространстве как целого, можно воспользоваться дополнительными частичными закреплениями грани или ребра во избежание вращения модели. При этом следует учитывать, что дополнительные закрепления должны быть выбраны так, чтобы не превосходить способ деформирования тела в условиях данной системы сил (не вызывать дополнительных сил реакции, например, ограничивать перемещение в тех направлениях, по которым составляющие сил равны нулю либо по осям симметрии).



Расчет незакрепленной модели, уравниваемой силами

Кнопка [**Настройка**], расположенная рядом с флагом «Стабилизировать систему» позволяет настроить величину дополнительной жесткости, в Н/м, приемлемой в условиях данной задачи.

Закладка [**Термоупругость**] позволяет определить режимы учёта термических нагрузок.

**Учитывать термоэффекты.** Включает режим расчёта нагрузок, возникающих в конструкции из-за сил линейного расширения под действием приложенной к телу температуры.

**Температура нулевых деформаций** – начальная температура тела, при которой температурные деформации отсутствуют, и отсутствуют напряжения, вызванные разностью температур. Пользователь может задать значение температуры в одной из принятых систем измерения температур: **К** – в Кельвинах; **С** – по Цельсию; **F** – по Фаренгейту.

В зоне «**Температурные поля**» определяется способ задания тепловой нагрузки.

**Равномерная температура** – в выбранной системе единиц задаётся значение однородного температурного поля, распространяющегося на все тела задачи.

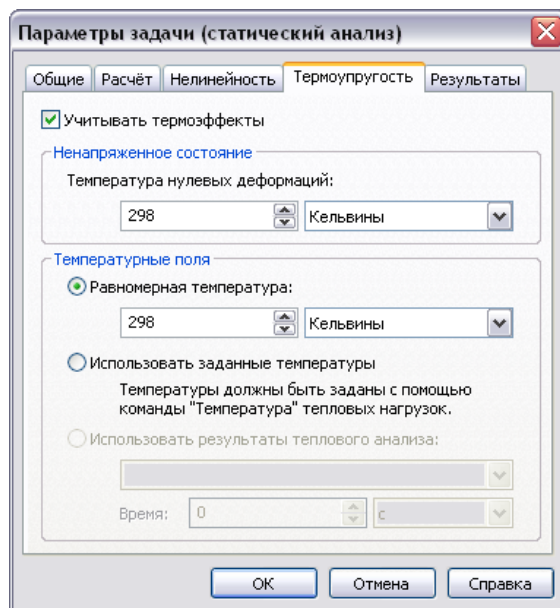
**Использовать заданные температуры** – в статическом расчёте учитываются температурные нагружения, заданные при помощи команды «**Анализ|Тепловые нагрузки|Температура**».

**Использовать результаты теплового анализа** – для задания температурного нагружения используются результаты решения имеющейся задачи теплового анализа. В выпадающем списке нужно выбрать имя рассчитанной задачи теплового анализа и (если необходимо) время, которому должен соответствовать результат. Необходимо учитывать, что для использования в качестве исходных температур результатов теплового расчёта нужно соблюсти определенные условия:

1. Условие идентичности конечно-элементных сеток статического и теплового расчётов. Наиболее простым способом достижения такой идентичности является использование команды «Копия», доступной из контекстного меню. Последовательность действий может быть, например, следующей:
  - а) создаём задачу типа «Тепловой анализ», генерируем сетку, определяем граничные условия, считаем;
  - б) используя команду «**Копия**», создаём копию задачи;
  - в) на закладке «Общие» в диалоге свойств задачи меняем тип задачи на «Статический анализ». В результате получаем две задачи разного типа с одинаковыми конечно-элементными сетками.
2. В обеих задачах режим «Производить расчёт линейным элементом» на закладке «Расчёт» диалога параметров задачи должен иметь *одинаковую* установку. Например, если тепловой расчёт осуществлялся линейным элементом, то и статический расчёт с использованием результатов теплового расчёта, можно осуществить только линейным элементом.

Закладка [**Результаты**] позволяет определить типы результатов, отображаемых в дереве задач после завершения расчёта.

**Сохранять результаты расчёта в файле** – включает режим, при котором все результаты расчёта сохраняются в файле вместе с моделью. Это позволяет анализировать результаты ранее посчитанной и сохранённой задачи без необходимости заново выполнять расчёт. Следует иметь в виду, что





сохранение результатов расчёта в документе приводит к увеличению размера файла документа - ориентировочно на 4,5-5 Мбайт на сто тысяч степеней свободы.

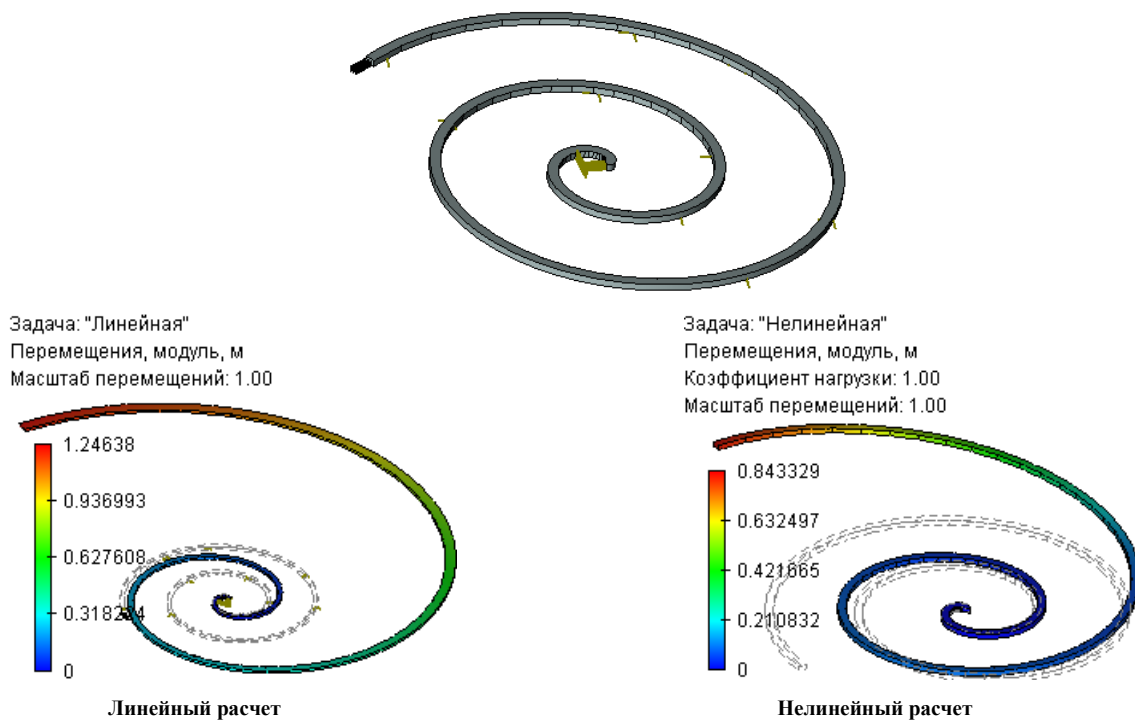
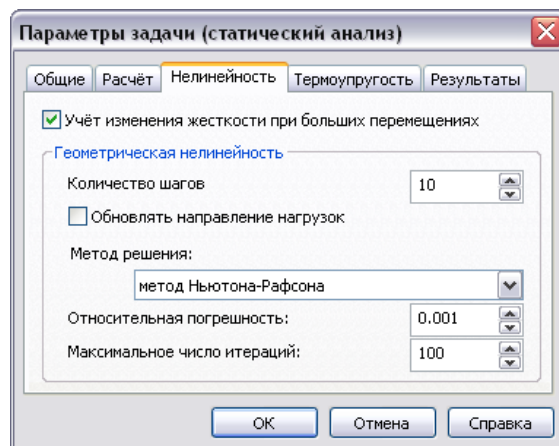
Закладка **[Нелинейность]** позволяет проводить статический расчет с учетом больших перемещений.

На практике встречаются ситуации, в которых под воздействием внешних нагрузок перемещения отдельных точек конструкции достигают значительных величин. Такие задачи особенно актуальны в авиационной и космической технике, при конструировании радиотелескопов, градиринов и других тонкостенных конструкций. В таких случаях следует учитывать нелинейные эффекты, так как предположения, на которых основан линейный анализ, нарушаются.

Опцию «Учет изменения жесткости при больших перемещениях» следует активировать в том случае, когда нарушается хотя бы одно из следующих предположений линейного анализа:

1. Вызываемые деформации достаточно малы, вследствие чего можно игнорировать изменения жесткости, вызванные нагрузкой;
2. В процессе приложения нагрузки граничные условия не меняют амплитуды, направления и распределения.

Например, линейный расчет детали типа спирали под действием нагрузки на торце дает погрешность примерно 30% по сравнению с нелинейным расчетом. Такое различие результатов возникает вследствие предположения малости перемещений в линейном анализе.



Элементы управления в группе «**Геометрическая нелинейность**» позволяют настроить процесс решения геометрически нелинейных задач.

Для решения таких задач шаговый нелинейный решатель организует процесс пошагового нагружения конструкции и обеспечивает решение линеаризованной системы уравнений на каждом шаге для текущего приращения вектора нагрузок, сформированного для конкретного нагружения.

**Количество шагов.** Позволяет установить количество шагов, в течение которых нагрузка будет изменяться от нуля до установленного значения. Теоретически все решения можно находить за один шаг для полной действующей нагрузки. Однако возникает возможность неединственности решения и при этом может быть найдено решение, не имеющее физического смысла. В таких случаях целесообразно задавать нагрузку отдельными приращениями и получать нелинейное решение для каждого приращения. С вычислительной точки зрения это часто экономично, поскольку эффекты нелинейности на каждом шаге становятся меньше. Если приращения нагрузки достаточно малы по величине, то каждое решение в приращениях с достаточной степенью точности может быть найдено за один шаг. По умолчанию определено 10 шагов.

**Обновление направления нагрузок** позволяет учитывать изменение вектора нагрузок в процессе нагружения в соответствии с деформированной геометрией модели.

**Метод решения.** По умолчанию используется метод Ньютона-Рафсона решения системы нелинейных уравнений.

На каждом шаге приложения нагрузки решение системы линейных алгебраических уравнений продолжается до тех пор, пока **относительная погрешность** между соседними решениями не станет меньше установленной величины.

Если **количество итераций** достигает величины, большей установленной, то происходит завершение расчета.

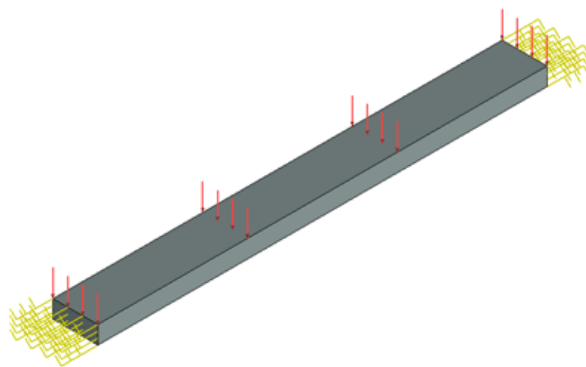
## Задача оптимизации

Задача оптимизации (или задача поиска оптимального решения) предназначена для автоматического поиска значений переменных, в наибольшей степени удовлетворяющих заданным ограничениям. В T-FLEX Анализ искомыми переменными могут быть, например, параметры геометрии изделия, свойства материалов (модуль упругости, коэффициент Пуассона и т.д.), из которых оно изготовлено, а также – приложенные нагрузки. Особенностью задачи оптимизации, используемой в T-FLEX Анализ, является то, что поиск оптимального решения осуществляется с учётом результатов расчёта задачи конечно-элементного анализа.



### Задача об оптимизации толщины балки

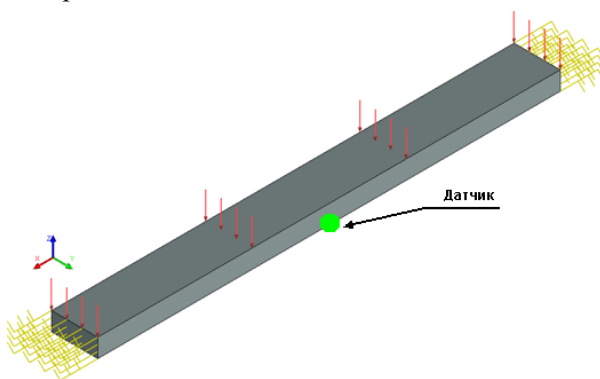
Данный пример иллюстрирует применение оптимизации для 3D модели с учётом результатов расчёта задачи конечно-элементного анализа. Пример представляет собой решение задачи о прогибе балки. Балка, защемленная с двух сторон, находится под действием силы  $25\text{ Н}$ .



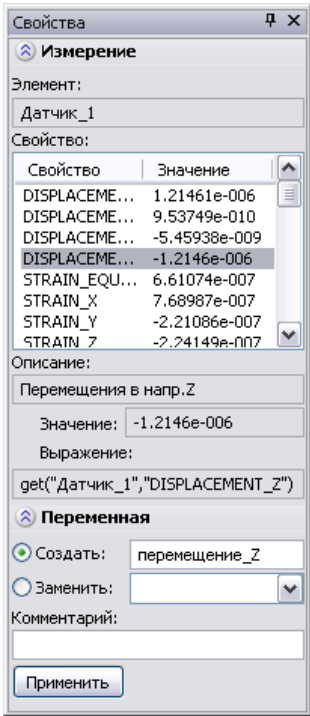
Необходимо определить допустимую толщину балки, при которой максимальное значение перемещения в направлении, совпадающем с направлением действия нагрузки, по модулю не превышает  $1e-06\text{ м}$ . Длина балки равна  $500\text{ мм}$ , ширина балки равна  $50\text{ мм}$ , толщина балки равна  $20\text{ мм}$ . Балка выполнена из стали *AISI 1020*.

Для начала создадим задачу статического анализа, построим конечно-элементную сетку, зададим материал задачи, приложим нагрузки и ограничения.

Для того чтобы в задаче оптимизации, которую будем решать далее, использовать результаты расчёта конечно-элементного анализа, создадим датчик на середине ребра балки, так как здесь предполагаются наибольшие перемещения.



Далее, выполнив расчёт задачи статического анализа, создадим переменную при помощи датчика. В качестве переменной выберем «Перемещения в направлении Z» и назовём её «*перемещение\_Z*».



Создадим задачу оптимизации. Задачу оптимизации можно создать при помощи команды:

Клавиатура	Текстовое меню	Пиктограмма
<PO>	«Параметры Оптимизация»	

Вызов команды возможен только при наличии в документе численных переменных.

После вызова команды появляется окно «**Задания на оптимизацию**», содержащее список сформированных задач оптимизации. Добавим новое задание на оптимизацию.

После нажатия кнопки [Добавить] на экране появляется окно «Параметры оптимизации».

Параметры оптимизации

Цель

Минимизировать

Допуск: 0

Ограничения

Переменная	Операция	Значение
------------	----------	----------

Добавить

Свойства

Удалить

Переменные

Имя	Минимум	Максимум
-----	---------	----------

Добавить

Свойства

Удалить

Запускать: Пользователь

Алгоритм...

☒ Показывать текущее решение

☒ Пересчитывать 3D модель

Пересчитывать задачи:

Задача\_0

OK

Отмена

В текстовой строке необходимо записать комментарий к задаче оптимизации.

Цель задачи оптимизации сформулируем следующим образом: *будем искать допустимое значение толщины балки при требуемом перемещении в направлении оси Z, равном (по модулю) 1E-06 м.* Поэтому выбираем значение «Приравнять», указываем переменную «перемещение\_Z» и вводим её целевое значение, равное -1E-06. Устанавливаем погрешность найденного значения («Допуск») 1E-014.

В группе «Переменные» указываем область определения переменной «толщина». Минимальное значение определяем равным 1 мм, максимальное значение – равным 50 мм.

Поскольку при изменении толщины балки изменяется значение её перемещения вдоль оси Z, то в процессе решения задачи оптимизации необходимо будет пересчитывать 3D модель и задачу статического анализа для каждого найденного значения толщины. Поэтому в поле «Пересчитывать задачи» необходимо отметить ту задачу, результаты которой используются для поиска оптимального значения переменной «толщина», а также включить опцию «Пересчитывать 3D модель».

**Параметры оптимизации**

**Цель**

Поиск допустимого значения толщины балки при заданных перемещениях

Приравнять:  перемещен:  -1e-06 Допуск: 1e-014

**Ограничения**

Переменная	Операция	Значение
------------	----------	----------

**Переменные**

Имя	Минимум	Максимум
толщина	1.000000	50.000000

Запускать: Пользователь

☒ Показывать текущее решение ☒ Пересчитывать задачи:

☒ Пересчитывать 3D модель ☒ толщина

OK Отмена

Нажать кнопку **[OK]**. Снова появится окно «**Задания на оптимизацию**». Чтобы выполнить расчёт необходимо из списка задач оптимизации выбрать необходимую задачу и нажать кнопку **[Выполнить]**.

**Задания на оптимизацию**

Имя	Комментарий
перемещение_Z	Поиск допустимого значения то...

Добавить Удалить Свойства Выполнить Выход

В результате решения задачи оптимизации получили значение толщины балки, равное 21.09 мм, перемещение вдоль оси Z при этом равно -9.07355E-007 м.

## Приложение (справочные материалы)

### Характеристики конструкционных материалов

Правильное назначение характеристик материалов, из которых изготавливается конструкция, является важным условием корректности конечно-элементных расчётов. Основные характеристики конструкционных материалов, используемые для прочностных расчётов в T-FLEX Анализе:

**Модуль упругости материала  $E$ , [Н/м<sup>2</sup>]** – коэффициент пропорциональности между напряжениями и относительными деформациями  $\sigma = E\varepsilon$ , возникающими в испытуемом на растяжение

призматическом образце центрально приложенной силой. При этом в средней части образца реализуется однородное напряженное состояние, направленное по продольной оси. Значение модуля упругости  $E$  на кривой деформирования  $\sigma = f(\varepsilon)$  численно равно тангенсу угла наклона линейного участка:  $E = \operatorname{tg} \beta$  на диаграмме напряжений при испытаниях образца. Физический смысл коэффициента  $E$  определяется как напряжение, необходимое для увеличения длины образца в два раза. Однако величина упругого удлинения у большинства твёрдых тел редко достигает даже 1%.

На диаграмме напряжений испытуемого образца есть несколько характерных точек, соответствующих изменению физических свойств материала и используемые при оценке степени надёжности материалов, находящихся под действием нагрузок.

**Предел упругости  $\sigma_n$**  – напряжения, являющиеся верхней границей проявления чисто упругих деформаций.

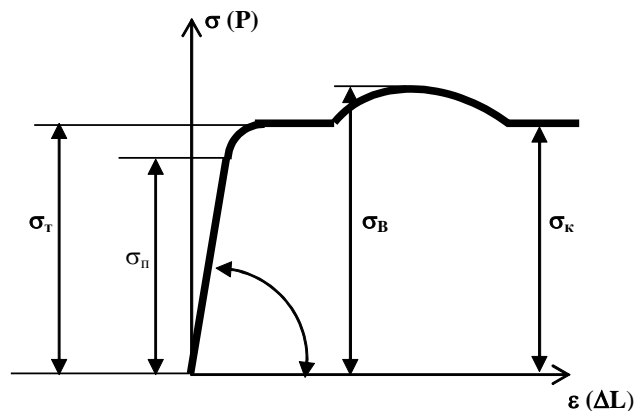


Диаграмма напряжений (растяжения) для пластичных материалов  
(например, малоуглеродистая сталь)

**Предел текучести  $\sigma_T$** . Дальнейшее удлинение образца (например, для малоуглеродистых сталей) происходит практически без увеличения нагрузки. Это явление носит название *текучести*, а горизонтальный участок диаграммы, расположенный непосредственно правее точки сгиба, называется *площадкой текучести*. У многих конструкционных материалов площадка текучести не выражена столь явно, как у малоуглеродистых сталей. Для таких материалов вводится понятие **условного предела текучести  $\sigma_s$** ; это напряжение, которому соответствует остаточная (пластическая) деформация, равная  $s$  %. Обычно принимается  $s = 0,2\%$ . Предел текучести для пластичных материалов выбирается в качестве критерия прочности – **максимального допустимого напряжения  $[\sigma]$** . Достижение напряжений, соответствующих пределу текучести, приводит к необратимым пластическим деформациям конструкции, т.е. к нарушению её работоспособности и является, таким образом, недопустимым явлением с точки зрения обеспечения надёжности.

**Предел прочности  $\sigma_B$**  (временное сопротивление) – напряжение, при превышении которого, происходит разрушение образца. При увеличении нагрузки наступает момент, при котором дальнейшая деформация образца происходит без увеличения или даже с уменьшением нагрузки вплоть до разрушения.

**Коэффициент Пуассона  $\mu$**  характеризует поперечные деформации, возникающие при растяжении образца. В упругой области деформация в поперечном направлении  $\varepsilon' = -\mu \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  —

деформация в продольном направлении,  $\mu$  — коэффициент Пуассона. Для изотропных материалов значения коэффициента Пуассона находятся в пределах  $0 < \mu < 0,5$ .

Для сталей различных марок  $E = 195-206$  ГПа,  $\mu = 0,23-0,31$ , для сплавов алюминия  $E = 69-71$  ГПа,  $\mu = 0,30-0,33$ . Упругие свойства некоторых материалов даны в таблице (в знаменателе указана соответствующая характеристика при сжатии).

Материал	Характеристика				
	$E$ , ГПа	$\sigma_T$ , МПа	$\sigma_E$ , МПа	$\delta$ , %	$\psi$ , %
Сталь СТ.3	200	240/240	450/-	26	50
Сталь 15	200	210/210	350/-	28	55
Сталь 45	200	340/340	610/-	24	45
Сталь 30ХГСА	200	950/950	1200/-	13	-
Чугун СЧ15-32	150	-	150/640	0,6	45
Медь прутковая	110	250/250	320/-	15	-
Дюралюмин Д16	75	240/240	420/-	18	-
Дельта-древесина	20	-	250/160	-	-
Текстолит	30	75/115	127/168	1,5	-

Характеристиками пластичности материала являются относительное удлинение и относительное сужение при разрыве:

$$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} 100\%, \quad \psi = \frac{F_0 - F_k}{F_0} 100\%$$

где  $l_0$ ,  $F_0$  — длина рабочей части образца и площадь поперечного сечения до деформации;  $l_k$  — длина рабочей части образца после разрыва;  $F_k$  — конечная площадь поперечного сечения в шейке образца после разрыва.

По величине относительного удлинения при разрыве проводится разделение состояния материалов на пластичное и хрупкое. Материалы, имеющие к моменту разрушения достаточно большие значения  $\delta$  ( $\delta > 10\%$ ), относят к *пластическим материалам*; к *хрупким* относят материалы с относительным удлинением  $\delta < 3\%$ . Для пластичных материалов характер диаграммы  $\sigma = f(\varepsilon)$  при сжатии примерно до возникновения текучести такой же, как и при растяжении. В процессе деформации сжатия образец укорачивается; при этом размеры поперечного сечения увеличиваются. Для ряда пластичных материалов обнаружить напряжение, аналогичное временному сопротивлению при растяжении, не удастся, так как образец сплющивается.

Хрупкие материалы проявляют значительно лучшую способность сопротивляться деформациям сжатия, чем деформациям растяжения; для них разрушающее напряжение при сжатии превышает предел прочности при растяжении в несколько раз. Разрушение хрупких материалов при сжатии происходит за счет образования трещин.

## Объёмное напряжённо-деформированное состояние в точке

Деформированное состояние в точке деформируемого тела описывается симметричным тензором деформаций:

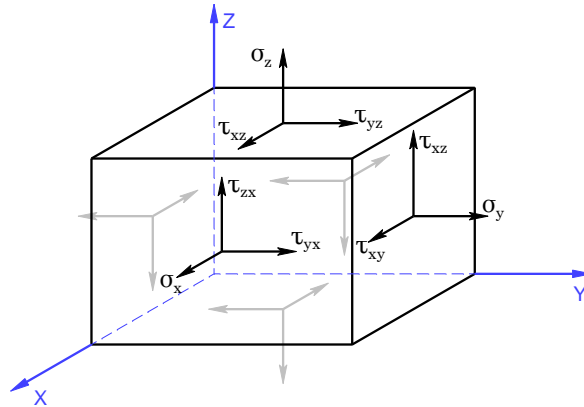
$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix},$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  - продольные относительные деформации,  $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$ ,  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ ,  $\gamma_{zy} = \gamma_{yz}$  - угловые деформации. Всегда можно указать такие три ортогональные направления, при которых углы сдвига равны нулю, а удлинения  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ . Деформации  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ , в направлениях, для которых отсутствуют углы сдвига, называются **главными деформациями** в точке.

Совокупность девяти компонент напряжений (по три на каждой из трех взаимно перпендикулярных площадок) представляет собой некоторый физический объект, называемый **тензором напряжений** в точке. Тензор представляется в виде симметричной матрицы:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix},$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  - напряжения сжатия-растяжения,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ ,  $\tau$  - касательные напряжения.



Компоненты тензора напряженного состояния в бесконечно малом параллелепипеде

Для компонент тензора напряжений общепринятым является следующее правило знаков: компонента считается положительной, если на площадке с положительной внешней нормалью (т. е. направленной вдоль одной из координатных осей) эта компонента направлена в сторону положительного направления соответствующей оси.

Тензор напряжений, как и тензор деформаций, обладает свойством симметрии.  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ . Условие симметрии тензора напряжений называются также условиями

**парности касательных напряжений:** касательные напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам в направлениях, ортогональных ребру, образованному пересечением этих площадок, равны по величине. С учетом этих свойств из девяти компонент тензора напряжений независимыми оказываются шесть компонент.

Также как и для деформаций для напряжений вводят понятие **главных напряжений**,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , соответствующих главным деформациям, которые связаны с компонентами тензора напряжений уравнением:

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0, \text{ где}$$

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad J_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}, \quad J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Решение кубического уравнения имеет три вещественных корня  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , которые обычно упорядочиваются в виде  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Главные напряжения обладают важным свойством: по сравнению со всеми другими площадками нормальные напряжения на главных площадках принимают экстремальные значения. Вводится также понятие среднего напряжения по формуле:

$$\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$$

### Оценка статической прочности конструкций. Теории прочности

Под предельным опасным напряжённым состоянием понимается такое, при котором происходит качественное изменение свойств материала – переход от одного механического состояния к другому. Для пластичных материалов предельным обычно считается напряжённое состояние, соответствующее возникновению заметных остаточных деформаций, а для хрупкого – такое, при котором начинается разрушение материала. Предельное состояние материала допустить нельзя. Поэтому при расчёте на прочность ориентируются на так называемое допускаемое состояние. Оно соответствует нагрузке, полученной путём деления нагрузки, вызывающей предельное состояние, на некоторый коэффициент запаса. Если в двух напряжённых состояниях коэффициенты запаса равны, то они называются равноопасными. Для сравнения различных напряжённых состояний за эталон (эквивалент) принято простое растяжение (сжатие) с главным напряжением  $\sigma_{\text{экр}}$ .

**Эквивалентное напряжение**  $\sigma_{\text{экр}}$  – это напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряжённое состояние было равноопасно заданному напряжённому состоянию. Условие прочности записывается в виде  $\sigma_{\text{экр}} \leq [\sigma]$ .

Теории прочности представляют собой гипотезы о критериях, определяющих условия перехода материала в предельное состояние.



### Первая теория прочности

В первой теории прочности за критерий перехода материала в предельное состояние принимается *наибольшее нормальное напряжение*. Согласно этой теории, опасное состояние наступает тогда, когда какое-либо из главных напряжений достигает опасного значения. В соответствии с этим при расчетах на прочность ограничивается величина *наибольших главных напряжений*, которая не должна превышать допускаемого нормального напряжения  $[\sigma]$ . Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^I \leq [\sigma],$$

где  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^I = |\sigma_1|$ , если  $\sigma_1 \geq |\sigma_3|$  и  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^I = |\sigma_3|$ , если  $\sigma_1 \leq |\sigma_3|$ .

### Вторая теория прочности

Во второй теории прочности за критерий принимается *наибольшая деформация*. Согласно этой теории опасное состояние материала наступает тогда, когда линейные деформации достигают некоторого опасного значения. Для пластичного материала условие прочности имеет вид

$$\max|\varepsilon| \leq [\varepsilon], \quad \text{где} \quad [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}. \quad \text{Если, например} \quad \max|\varepsilon| = \varepsilon_I = \frac{1}{E}[\sigma_I - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)], \quad \text{то}$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{II}} = \sigma_I - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma].$$

Для хрупкого материала условие прочности имеет вид:

$$\varepsilon_{\max} \leq [\varepsilon_p] = \frac{[\sigma_p]}{E}, \quad |\varepsilon_{\min}| \leq [\varepsilon_c] = \frac{[\sigma_c]}{E}$$

Первая теория дает удовлетворительное совпадение с опытными данными только для *хрупких материалов*. Вторая практически в настоящее время не применяется.

### Третья теория прочности

В третьей теории прочности критерием принимается *наибольшее касательное напряжение*. Согласно этой теории опасное состояние наступает, если наибольшие касательные напряжения достигают опасного значения.

Условие прочности имеет вид:  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ , где  $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$ . Откуда:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sigma_I - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

### Четвертая (энергетическая) теория прочности

Четвертая теория прочности - энергетическая, представляет собой гипотезу о том, что причиной возникновения опасного состояния является величина удельной потенциальной энергии изменения формы  $u_\phi$ , то есть критерий – удельная потенциальная энергия изменения формы.

Формулу удельной потенциальной энергии изменения формы получим из формулы полной удельной потенциальной энергии деформации, подставляя значение коэффициента Пуассона равного  $\mu=0,5$ .

Получим:

$$[u_\phi] = \frac{1+\mu}{3A} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3)$$

Условие прочности имеет вид  $u_\phi \leq [u_\phi]$ , где  $[u_\phi] = \frac{1+\mu}{3A}[\sigma]$ .

Откуда:

$$\sigma_{\text{экв}}^{IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma]$$

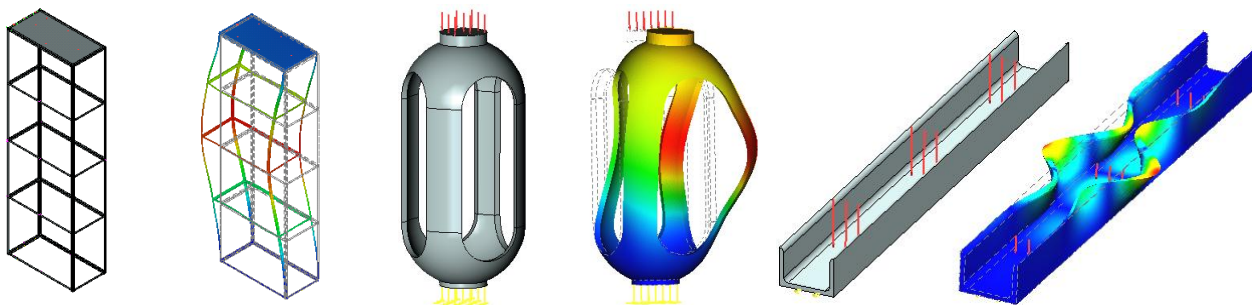
или

$$\sigma_{\text{экв}}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} \leq [\sigma]$$

Третья и четвертая теории прочности дают удовлетворительное совпадение результатов теоретического расчета с опытными данными для **пластичных материалов** и широко применяются при расчетах на прочность. Для хрупких материалов эти теории не применимы.

## АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

Равновесие статически нагруженной конструкции называют устойчивым, если малым возмущающим воздействиям соответствуют малые деформации. В определённых случаях нагружений конструкций возможны ситуации т.н. **потери устойчивости** – когда малые возмущения приложенных к системе сил приводят к большим деформациям конструкции, выходящими за рамки линейной теории упругости. Нагрузки, при которых происходит потеря устойчивости, называют **критическими**, а соответствующие состояния – **критическими состояниями**. При сжимающих силах, даже незначительно превышающих критическое значение, дополнительные напряжения изгиба достигают весьма больших значений и непосредственно угрожают прочности конструкции. Поэтому, критическое состояние, как непосредственно предшествующее разрушению, считается недопустимым в условиях реальной эксплуатации. Опасность потери устойчивости особенно велика в сжатых зонах для лёгких тонкостенных конструкций типа гибких стержней, пластин и оболочек. Явления потери устойчивости весьма разнообразны: появление качественно новых форм равновесия; исчезновение устойчивых форм равновесия и др.



Модуль анализа устойчивости предназначен для решения задачи т.н. **начальной устойчивости** конструкции. Результатом расчёта является коэффициент критической нагрузки, при действии которой конструкция может скачкообразно перейти в новое равновесное состояние, и соответствующая этой нагрузке форма нового равновесного состояния. В этом случае возможна ситуация, когда критическая нагрузка, при которой произойдёт потеря устойчивости, может быть значительно меньше нагрузки, при которой произойдёт потеря прочности конструкции по критериям линейного статически-напряженного состояния. Т.е. напряжения в материале конструкции могут не достигнуть предельных значений, но деформации из-за потери устойчивости могут привести к разрушению конструкции. Таким образом, условие устойчивости по критерию критических нагрузок может быть сформулировано так:

**Фактические нагрузки, приложенные к конструкции, с учётом назначаемого коэффициента запаса, должны быть меньше расчётных критических нагрузок:**

$$F_{\text{фактические}} \cdot K_{\text{запаса}} < F_{\text{критические}}$$

Оценив значение критической нагрузки, при котором конструкция может потерять устойчивость, можно оптимизировать изделие с целью достижения условия надёжности. Например, для протяжённого объекта можно повысить устойчивость путём уменьшения длины или увеличения толщины объекта, либо можно создать дополнительные рёбра жесткости.

## Особенности этапов анализа на устойчивость

Анализ на устойчивость осуществляется в несколько этапов. Последовательность действий пользователя по подготовке задачи и выполнению расчёта конструкции на устойчивость во многом схожа с алгоритмом, описанным для Статического анализа. Поэтому в данной главе отметим только некоторые особенности, характерные для расчёта на устойчивость:

1. **Создание задачи.** При создании задачи нужно указать её тип – «Анализ устойчивости»
2. **Наложение граничных условий.** В анализе устойчивости, как и в статическом анализе, роль граничных условий выполняют закрепления и нагрузки. При анализе на устойчивость могут использоваться все типы закреплений и все виды силовых нагрузок. Температурные воздействия задаются также как и в статическом анализе. Задание закреплений и силовых нагрузок является обязательным условием выполнения корректного расчёта. Суммарно наложенные на модель ограничения должны удовлетворять следующему условию:

Для обеспечения анализа устойчивости модель должна иметь закрепление, исключающее её свободное перемещение в пространстве как твёрдого тела. Невыполнение этого условия приведёт к неверным результатам конечно-элементного моделирования или срыву вычислительного процесса.

Отметим также, что задание нагрузок имеет большое значение для обеспечения корректности постановки задачи расчёта начальной устойчивости. В частности, при определенных случаях нагружения, решение задачи может не иметь физического смысла (например, стержень, растягиваемый продольной силой). Признаком корректно заданных граничных условий является положительное значение коэффициента критической нагрузки, полученного в результате расчёта.

3. **Выполнение расчёта.** Перед выполнением расчёта пользователь указывает в свойствах задачи алгоритмы расчёта и количество форм потери устойчивости, которые он хочет анализировать.

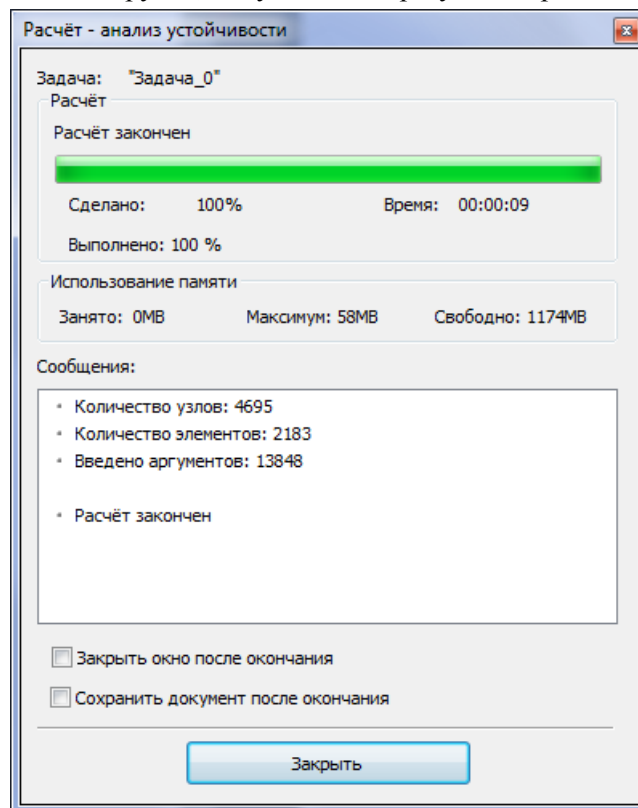
В информационное окно при выполнении расчёта выводится следующая справочная информация:

**Количество узлов** – количество узлов расчётной конечно-элементной сетки.

**Количество элементов** – количество тетраэдров в конечно-элементной сетке.

**Введено аргументов** – количество уравнений, участвующих в решении.

**Расчёт закончен** – символизирует о том, что процесс решения завершился успешно.



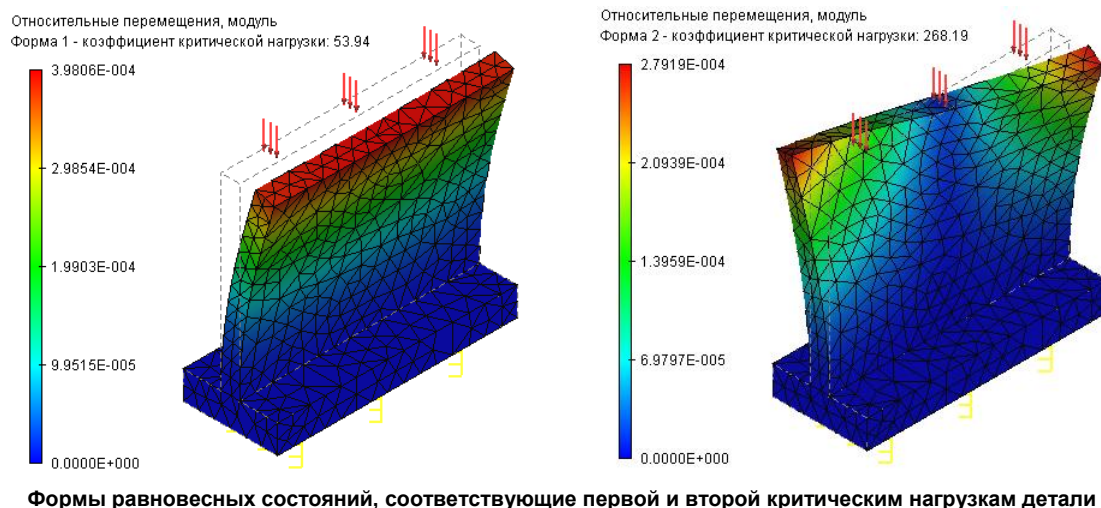
#### 4. **Результаты.** Результатами анализа устойчивости являются:

**Коэффициент критической нагрузки** – расчётное значение коэффициента, произведение которого на приложенные к системе нагрузки, даёт фактическое значение критической нагрузки, приводящей систему в новое равновесное состояние. Например, для модели приложена распределенная сила 1000 Н. Коэффициент критической нагрузки по результатам расчёта составил 109,18. Это означает, что первая форма устойчивого равновесного состояния для данной модели имеет критическую нагрузку 109180 Н.

Коэффициент критической нагрузки должен быть положительным. Если в результате решения коэффициент критической нагрузки получился отрицательным, это означает, что при приложенных к конструкции нагрузках состояние потери устойчивого равновесия не может быть достигнуто.

**Относительные перемещения**, соответствующие данной критической нагрузке. Этот тип результата отражает форму равновесного устойчивого состояния конструкции, соответствующую определенной критической нагрузке. Формы равновесных состояний, отображаемые в окне постпроцессора после завершения расчёта, представляют собой относительные перемещения. Анализируя эти формы, можно сделать заключения о характере перемещений в ситуации потери устойчивости. Зная ожидаемую равновесную форму на некоторой критической нагрузке, можно, например, задать дополнительное закрепление или опору в области конструкции, соответствующей максимуму данной формы равновесного состояния, что приведёт к эффективному изменению механических свойств изделия.

В качестве дополнительного (справочного) результата можно вывести также перемещения конструкции под действием приложенных статических нагрузок, расчёт которых предшествует расчёту коэффициентов критических нагрузок.





#### Алгоритм оценки устойчивости по результатам моделирования

После успешного расчёта задачи необходимо проанализировать результаты расчётов, чтобы сделать заключение о вероятной устойчивости конструкции по результатам конечно-элементного моделирования. Примерная последовательность действий по оценке результатов конечно-элементного моделирования явления начальной устойчивости следующая:

1. **Оценка корректности решения.** Как уже отмечалось, коэффициент критической нагрузки должен быть положительным. Если коэффициент получился отрицательным, значит

- нагружения, приложенные к конструкции, не вызывают эффектов неустойчивого поведения системы.
2. **Оценка значения коэффициента.** Если коэффициент критической нагрузки получился положительным и меньше 1, это означает, что при заданных нагружениях система потеряет устойчивость, и конструкция нуждается в доработке. Если коэффициент критической нагрузки положителен и больше 1, значит, при заданных условиях нагружения потеря устойчивости конструкции не угрожает.
  3. **Анализ форм равновесных состояний.** В дереве задач из контекстного меню по команде «Открыть» или «Открыть в новом окне» открываем результат «Форма 01», соответствующий наименьшей критической нагрузке. Визуально оцениваем характер деформированного состояния конструкции. Анализ форм равновесных состояний позволяет сделать вывод о направлениях и местах максимальных перемещений, соответствующих критической нагрузке. Эта информация может быть использована для оптимизации конструкции изделия с целью повышения её устойчивости.

## Настройки Процессора анализа устойчивости

По умолчанию, после инициализации команды **«Анализ|Расчёт»** появляется диалог задания свойств задачи, имеющий несколько переключаемых вкладок. Пользователь может изменить установленные по умолчанию свойства задачи. Доступ к свойствам задачи можно также осуществить по  на имени задачи в дереве задач или из контекстного меню по нажатию  на имени выбранной задачи в дереве задач. Свойства задачи, определённые пользователем, сохраняются при сохранении документа, а также наследуются при копировании задачи. Основное назначение свойств задачи – задание требуемых для работы Процессора режимов, списков отображаемых после расчёта в дереве задач результатов и количество форм потери устойчивости.

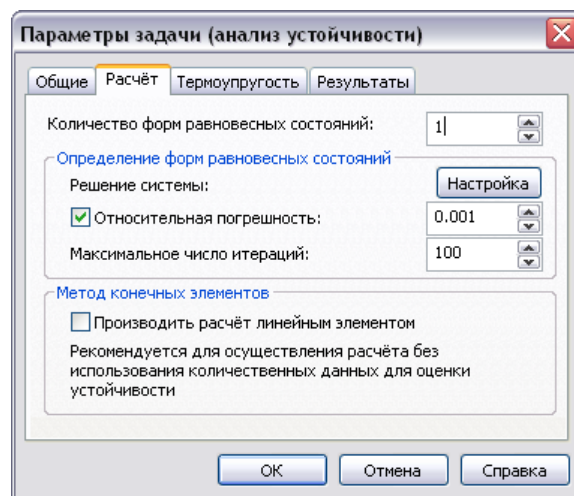
На вкладке **[Общие]** можно определить или изменить описательные свойства текущей задачи: имя, тип задачи, комментарий.

На вкладке **[Расчёт]** можно задать свойства процессора для решения уравнений.

**Количество форм равновесных состояний.** Пользователь может определить количество критических нагрузок и соответствующих форм равновесных состояний, подлежащих определению. Для практических целей, наибольшую ценность представляет 1-я форма, соответствующая минимальной критической нагрузке. Однако пользователь может найти также критические нагрузки других форм равновесных состояний.

В группе **«Определение форм равновесных состояний»** для параметра **«Решение системы»** необходимо указать возможность использования дополнительной дисковой памяти (**[Настройка]**): автоматически, запрещено, принудительно. Использование дополнительной дисковой памяти позволяет сохранить разложение матрицы жёсткости на диск.

**Относительная погрешность** – погрешность определения критических нагрузок, достижение которой приводит к окончанию итерационного процесса.



**Максимальное число итераций** – предельное количество итераций, по достижении которого решение систем уравнений итерационным методом прекращается, даже если требуемая точность решения не достигнута.

В группе **“Метод конечных элементов”** пользователь может установить режим **«Производить расчёт линейным элементом»**. Он позволит провести намного более быстрый расчёт для приблизительной оценки относительного распределения амплитуд форм равновесных состояний на достаточно подробной сетке.

Расчёт линейным элементом обеспечивает *недостаточную* точность определения критических нагрузок. Значения критических нагрузок при расчёте линейным конечным элементом значительно (в десятки и сотни раз) больше значений, получаемых при расчёте более точными методами. Настоятельно рекомендуется для количественной оценки коэффициента критических нагрузок использовать только расчёт квадратичным элементом (режим по умолчанию).

На закладке **[Результаты]** определяются типы результатов, отображаемых в дереве задач после завершения расчёта.

## ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ

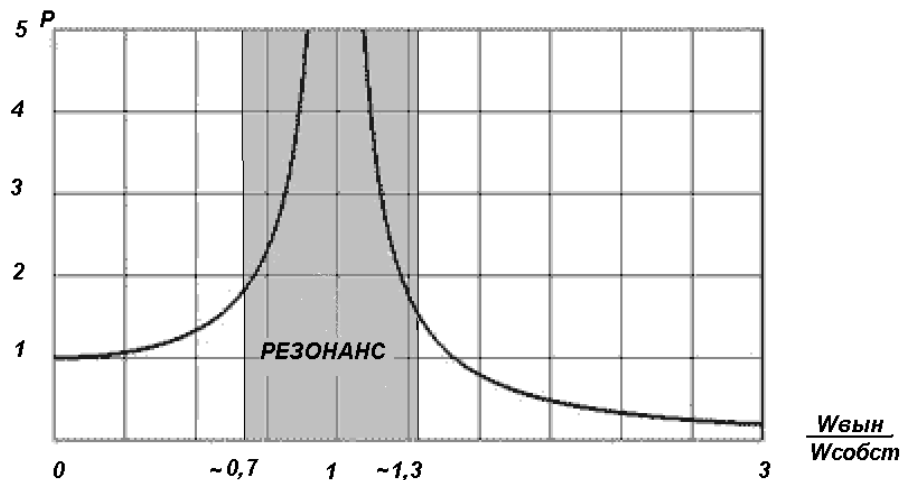
Модуль частотного анализа предназначен для расчёта собственных (резонансных) частот колебаний конструкций и соответствующих им форм колебаний. Задача расчёта собственных частот и соответствующих им форм колебаний возникает во многих практических случаях анализа динамического поведения конструкции под действием переменных нагрузок. Наиболее распространена ситуация, когда при проектировании возникает необходимость убедиться в малой вероятности возникновения в условиях эксплуатации такого механического явления, как резонанс. Как известно, суть резонанса заключается в значительном (в десятки раз и более) усилении амплитуд вынужденных колебаний на определённых частотах внешних воздействий – т.н. резонансных частотах. В большинстве случаев возникновение резонанса является нежелательным явлением с точки зрения обеспечения надёжности изделия. Проверка спектральных свойств конструкции на возможность резонансов в рабочем диапазоне частот внешних воздействий на стадии проектирования позволяет внести в конструкцию изменения, способные изменить спектр собственных частот. Это позволит избежать или значительно уменьшить вероятность появления резонансов в процессе эксплуатации. Таким образом, условие виброустойчивости по критерию собственных частот может быть сформулировано так:

**Собственные частоты конструкции должны лежать за пределами диапазона частот внешних воздействий:**

$$f_i \notin [0.7 f_{\min}^{\text{возд}}; 1.3 f_{\max}^{\text{возд}}]$$

где  $f_i$  –  $i$ -я собственная частота конструкции. Обычно, наибольшую опасность представляют резонансы на нижних собственных частотах ( $i \leq 5$ ), т.к. именно на них аккумулируется большая часть механической энергии;

$f_{\min}^{\text{возд}}, f_{\max}^{\text{возд}}$  – нижняя и верхняя частоты известного диапазона внешних вибрационных воздействий.

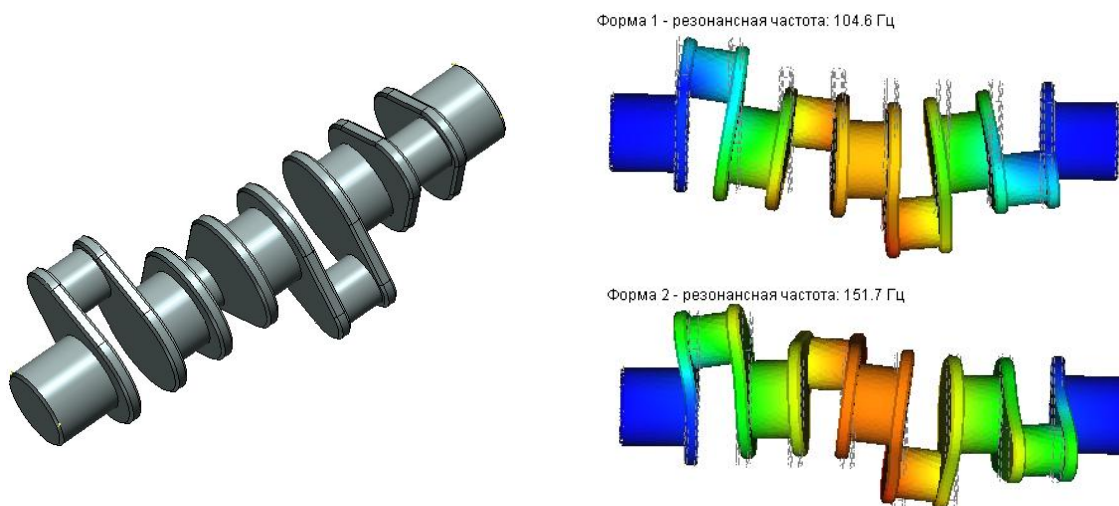


Изменение коэффициента усиления амплитуд в зависимости от отношения частоты собственных колебаний и внешнего воздействия в системе с недостаточным демпфированием

Оценив спектр собственных частот колебаний конструкции на стадии проектирования, можно оптимизировать конструкцию с целью достижения условия частотной виброустойчивости. Для



увеличения собственных частот необходимо придать конструкции больше жёсткости и (или) уменьшить её массу. Например, для протяжённого объекта можно повысить жёсткость, уменьшив длину или увеличив толщину объекта. Для уменьшения собственной частоты изделия необходимо, напротив, прибавить массу или уменьшить жёсткость объекта.



Таким образом, осуществляя с помощью модуля частотного анализа расчёт резонансных частот конструкции на этапе проектирования и оптимизируя массо-жесткостные свойства изделия, пользователь может повысить надёжность разрабатываемой конструкции с точки зрения её виброустойчивости и вибропрочности.

## Особенности этапов частотного анализа

Частотный анализ осуществляется в несколько этапов. Последовательность действий пользователя по подготовке задачи и выполнению частотного расчёта конструкции во многом схожа с алгоритмом, описанным для Статического анализа. Поэтому в данной главе отметим только некоторые особенности, характерные для расчёта на устойчивость:

1. **Создание «Задачи».** При создании задачи нужно указать её тип – «Частотный анализ» в окне свойств команды.
2. **Наложение граничных условий.** В задаче частотного анализа роль граничных условий выполняют только закрепления. Задание закреплений является обязательным условием выполнения корректного частотного расчёта. Суммарно наложенные на перемещение тела ограничения должны удовлетворять следующему условию:

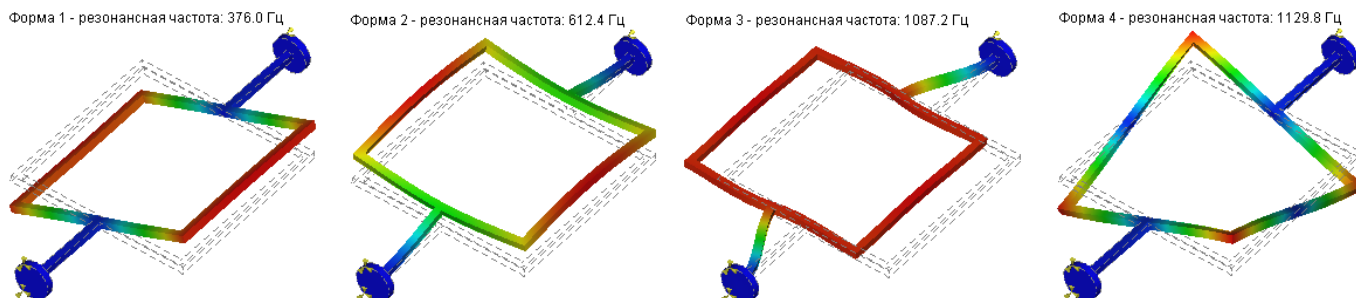
Для обеспечения частотного анализа модель должна иметь закрепление, *исключающее её свободное перемещение* в пространстве, как твёрдого тела. Невыполнение этого условия приведёт к неверным результатам конечно-элементного моделирования или срыву вычислительного процесса.


3. **Расчёт.** Перед выполнением расчёта пользователь должен указать количество собственных частот и, если необходимо, уточнить алгоритмы расчёта.
4. **Анализ результатов частотного расчёта.** Результатами частотного анализа являются:

**Частота собственных колебаний (Гц)** - соответствует ожидаемой резонансной частоте конструкции. Теоретически количество собственных частот для любого тела бесконечно. В результатах отображаются только частоты для выбранных форм собственных колебаний.

**Форма собственных колебаний**, соответствующая данной частоте. Поясним физический смысл понятия «форма колебания». Форма колебаний показывает, какие относительные деформации (перемещения) будет испытывать конструкция, в случае возникновения резонанса на соответствующей собственной частоте. Обратим особое внимание, что формы колебаний, отображаемые в окне Постпроцессора после завершения расчёта, представляют собой *относительные амплитуды колебаний*. Анализируя эти формы, можно сделать заключения о *характере* резонансных перемещений, но не об их фактической амплитуде. Зная ожидаемую форму колебаний на некоторой собственной частоте, можно, например, задать дополнительное закрепление или опору в области конструкции, соответствующей максимуму данной формы колебаний, что приведёт к эффективному изменению спектральных свойств изделия.

По умолчанию формы колебаний отображаются в окне постпроцессора без цветовой окраски, которую можно включить в свойства визуализатора.



Отметим, также, что при анализе характера движения, осуществляемого конструкцией на определённой частоте, удобно использовать анимацию. Напомним, что для запуска процесса анимации нужно в свойствах окна результатов расчёта (доступ по  в окне постпроцессора) активировать элемент управления «Анимация» и указать желаемые параметры анимации.

## Настройки Процессора частотного анализа

На закладке **[Общие]** можно определить или изменить описательные свойства текущей задачи: имя, тип задачи, комментарий.

На закладке **[Расчёт]** можно задать свойства процессора для решения уравнений.

В группе «Спектр собственных частот» необходимо:

- определить параметр «Количество собственных частот», то есть пользователь может указать количество нижних собственных частот конструкции, подлежащих определению;
- включить опцию «Незакреплённая система» в том случае, если ограничений, приложенных к модели, не достаточно, чтобы исключить её свободное перемещение в пространстве.

В группе «Определение собственных частот» для параметра «Решение системы» необходимо указать возможность использования дополнительной дисковой памяти (**[Настройка]**): автоматически, запрещено, принудительно. Использование дополнительной дисковой памяти позволяет сохранить разложение матрицы жёсткости.

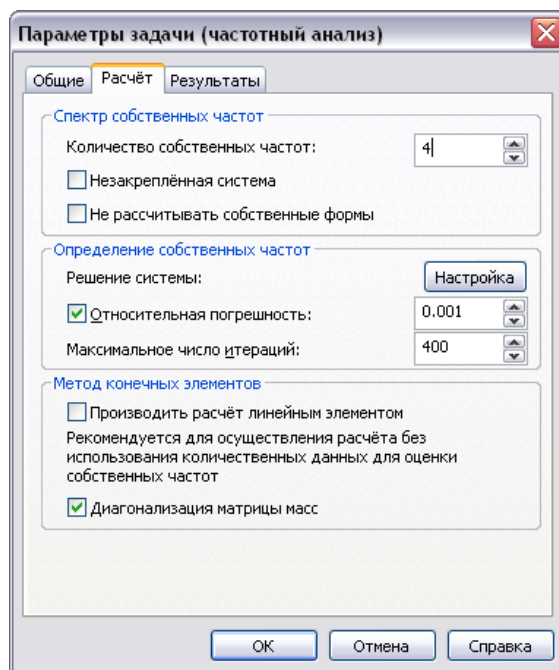
**Относительная погрешность** – погрешность определения собственных частот, достижение которой приводит к окончанию итерационного процесса.

**Максимальное число итераций** – предельное количество итераций, по достижении которого решение систем уравнений итерационным методом прекращается, даже если требуемая точность решения не достигнута.

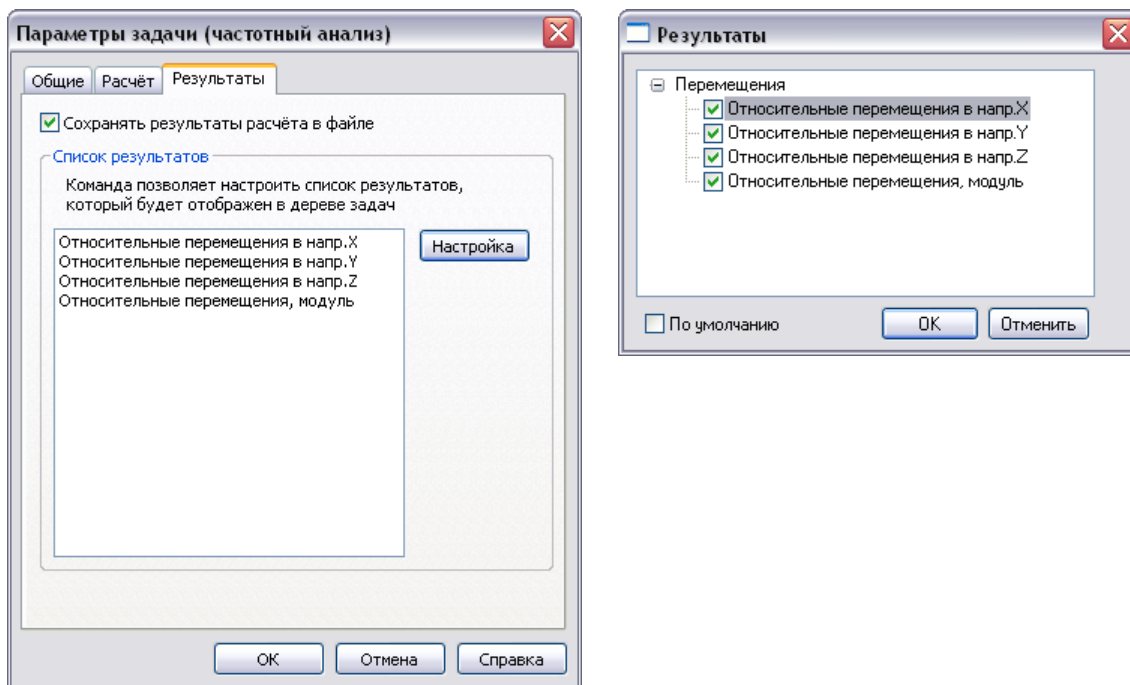
В группе «Метод конечных элементов» пользователь может установить режим «Производить расчёт линейным элементом», если пользователь заинтересован в получении *качественных* результатов, т.е. его интересуют лишь относительные распределения амплитуд форм колебаний.

Обращаем внимание, что расчёт линейным элементом обеспечивает недостаточную точность определения значений собственных частот. Значения частот при расчёте линейным конечным элементом могут быть значительно больше значений, получаемых при расчёте более точными методами. Рекомендуется для количественной оценки собственных частот использовать расчёт только квадратичным элементом (режим по умолчанию).

**Диагонализация матрицы масс.** Данный режим позволяет уменьшить количество требуемой памяти для решения системы линейных алгебраических уравнений. При этом точность полученных результатов становится незначительно меньше.



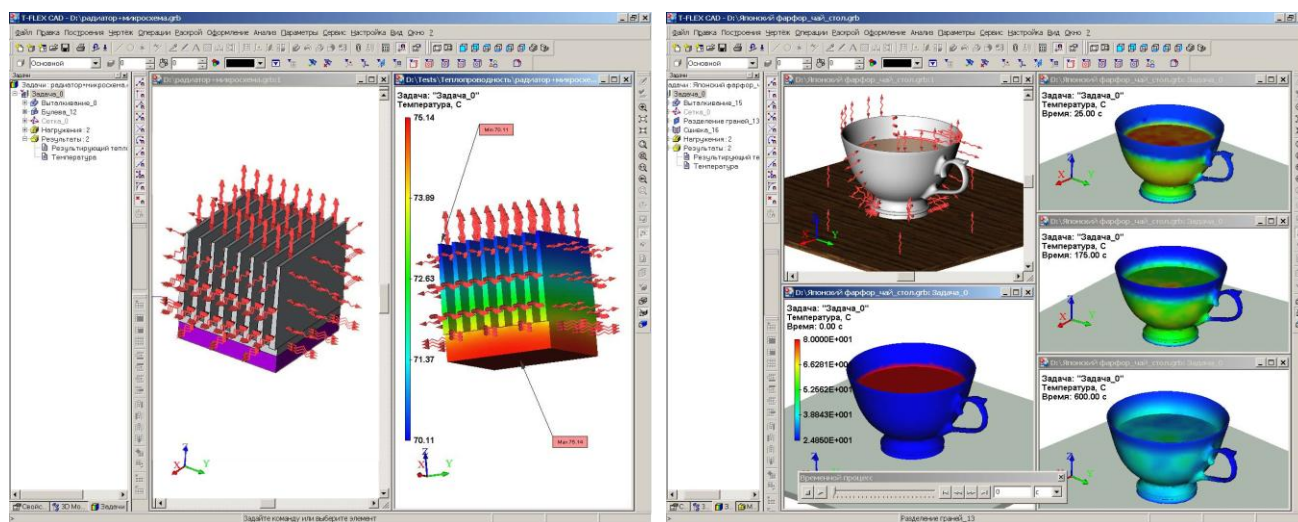
На закладке [Результаты] определяются типы результатов, отображаемых в дереве задач после завершения расчёта. В частотном расчете для пользователя доступны только относительные перемещения – либо модуль, либо в направлении соответствующих осей глобальной системы координат.



## ТЕПЛОВОЙ АНАЛИЗ

Модуль теплового анализа предназначен для решения задач теплопроводности и теплопередачи. Целью осуществления тепловых расчётов обычно является определение температурных полей, а также тепловых потоков в объёме изделия. В T-FLEX Анализе возможны две постановки задачи теплового анализа:

- **Установившийся режим** – расчёт распределения температурных полей и тепловых потоков в предположении бесконечно-длительного периода времени, прошедшего после приложения тепловых нагрузок. В установившемся режиме температура тела не изменяется с течением времени, и в каждую единицу времени элементарный объём тела отдаёт в окружающую среду столько же энергии, сколько получает извне или от внутренних источников тепла.
- **Нестационарный процесс** – расчёт температурных полей осуществляется в функции времени. В анализируемой физической системе происходит изменение распределения температурных полей с течением времени и в результате расчёта мы получаем поля температур в каждый момент времени некоторого заранее определенного пользователем временного интервала.



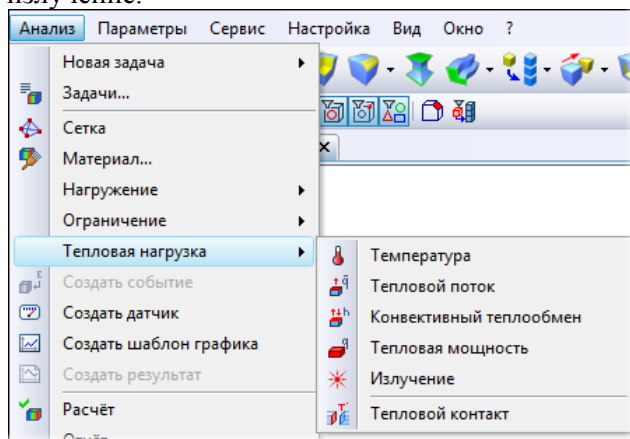
Примеры установившегося (слева) и нестационарного (справа) термодинамических процессов.

### Особенности этапов теплового анализа

Тепловой анализ осуществляется в несколько этапов. Последовательность действий пользователя по подготовке задачи и выполнению теплового расчёта конструкции во многом схожа с алгоритмом работы с другими расчётными модулями T-FLEX Анализа. Поэтому в данной главе отметим только некоторые особенности, характерные для осуществления тепловых расчётов.

1. **Создание задачи.** При создании задачи нужно указать её тип – «Тепловой анализ». Так же как и в других видах расчёта, необходимо построение конечно-элементной сетки, аппроксимирующей геометрию конструкции.

2. **Наложение граничных условий.** В тепловом анализе роль граничных условий выполняют прикладываемые к модели граничные и начальные температуры, источники тепловой мощности, тепловые потоки, тепловые контакты, а также условия теплообмена модели с окружающей средой – конвекция и излучение.



Команды задания граничных условий теплового анализа

При задании температурных нагружений необходимо отличать и правильно использовать два варианта задания нагрузки «Температура» (см. «Препроцессор») – «Начальная температура» и «Температура». Начальная температура используется для задания температурных нагрузок в начальный (нулевой) момент времени только для нестационарного теплового расчёта. Все температурные нагрузки, заданные без флага «начальная» считаются константными (неизменными) как в установившемся режиме, так и в нестационарном тепловом расчёте.

3. **Расчёт.** Перед выполнением расчёта пользователь может указать тип решаемой задачи теплового анализа (закладка **[Параметры]**, стационарная или нестационарная теплопроводность), и если необходимо, уточнить алгоритмы решения систем уравнений на закладке **[Расчёт]**.
4. **Анализ результатов теплового расчёта.** Результатами теплового анализа являются:

**Температурные поля** – распределение температуры по объёму модели.

**Градиенты температуры по осям X,Y,Z, а также модуль градиента температуры** – отображают степень изменения температуры по соответствующим осям системы координат.

**Результирующие тепловые потоки по осям X,Y,Z, а также модуль результирующего теплового потока** – показывают интенсивность передачи тепловой энергии, определённую по результатам решения задачи теплового анализа.

Модули градиента температуры и результирующего теплового потока определяются как корень квадратный из суммы квадратов соответствующих координатных компонентов.

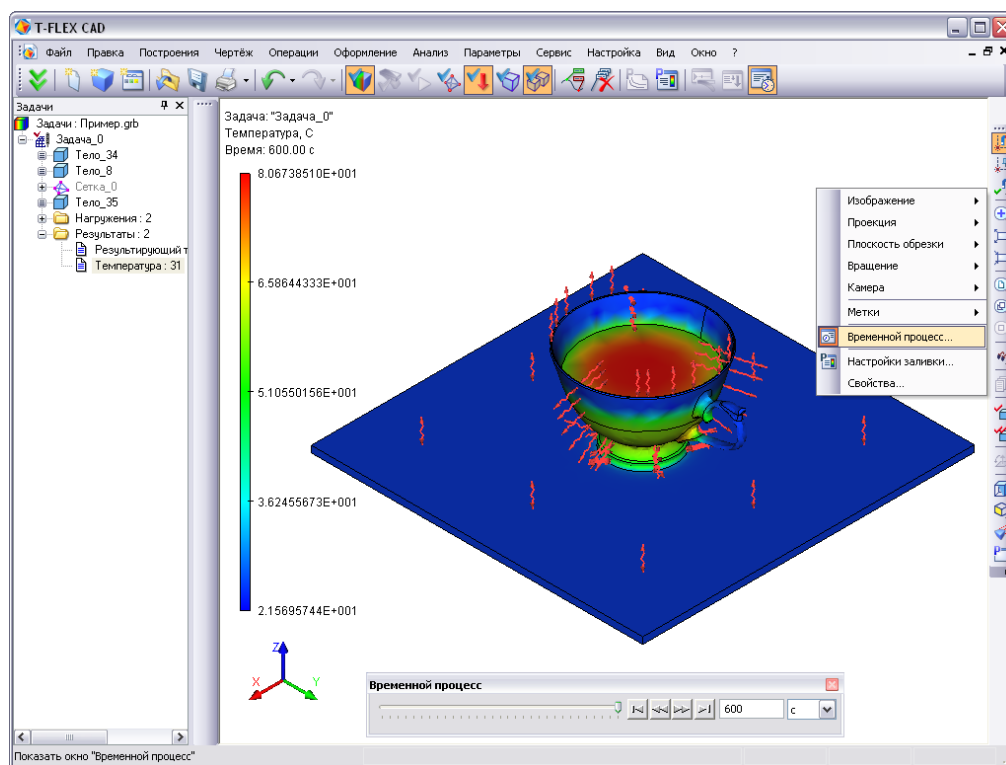
Кроме указанных результатов, в качестве справочных данных в окне постпроцессора можно отобразить:

- **Приложенный тепловой поток** соответствует заданным исходным параметрам тепловых нагружений;
- **Известные температуры** – приложенные к модели неизменные температурные нагрузки;
- **Начальные температуры** – приложенные к модели начальные температуры (для нестационарного теплового анализа).



Методы анализа результатов теплового расчёта в Постпроцессоре T-FLEX Анализа, в целом, аналогичны способам исследования результатов в других расчётных модулях. Отметим некоторые специфические инструменты Постпроцессора, которые можно использовать для анализа результатов *нестационарной теплопроводности*.

В результате решения задачи нестационарной теплопроводности получается большой набор результатов, общее количество которых равно количеству определённых пользователем временных шагов. В T-FLEX Анализе пользователю предоставляется удобный визуальный интерфейс для управления всем массивом полученных в результате расчёта данных. Для этого из контекстного меню в окне визуализатора результатов вызывается диалоговая панель «Временной процесс», с помощью которой пользователь может осуществлять быстрый переход к нужному результату по временной шкале.



Использования окна «Временной процесс» для управления доступом к результатам нестационарного теплового расчёта

## Настройки Процессора теплового анализа

На закладке **[Общие]** можно определить или изменить описательные свойства текущей задачи: имя, тип задачи, комментарий.

Закладка **[Расчёт]** содержит настройки для решения систем алгебраических уравнений, аналогичные по смыслу настройкам задачи «Статический анализ» (см. соответствующую главу). Отметим, что в большинстве случаев при осуществлении тепловых расчётов можно использовать режим **«Производить расчёт линейным элементом»**, что позволяет осуществить расчёт значительно быстрее. В отличие от задач статики, частотного анализа и анализа устойчивости, результаты расчётов в предположении линейной интерполяции полей температур по объёму модели

обычно не сильно отличаются от соответствующих результатов, полученных при использовании квадратичной интерполяции.

На закладке **[Параметры]** перед выполнением расчёта пользователь может указать тип решаемой задачи теплового анализа: стационарная (установившийся режим) или нестационарная теплопроводность (нестационарный процесс),

Для нестационарной теплопроводности необходимо также установить временной интервал («Конечное время моделирования»), временной шаг и начальную температуру.

Элемент управления **«Использовать заданные начальные температуры»** в тепловом расчёте позволяет определить в качестве начальной температуры:

- заданную при помощи команды **«Анализ|Тепловые нагрузки|Температура»** начальную температуру;
- температуру, заданную по умолчанию в тех узлах конечно-элементной сетки, где начальная температура не определена пользователем.

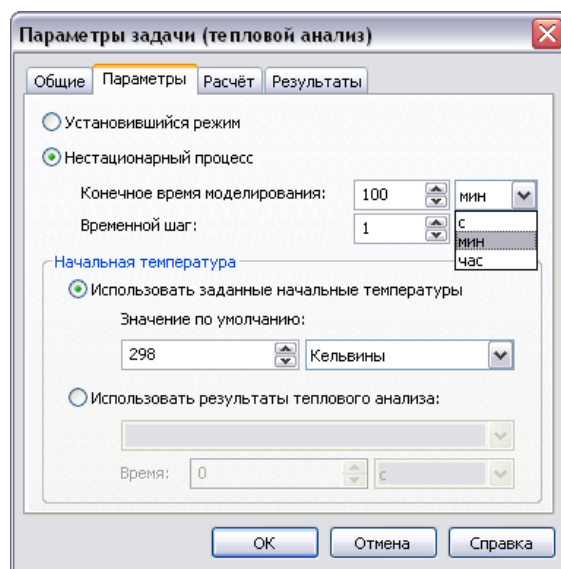
Элемент управления **«Использовать результаты теплового анализа»** позволяет определить в качестве начальной температуры результаты выполненного ранее теплового расчёта. Этот пункт диалога доступен пользователю, если в модели присутствуют выполненные ранее тепловые расчёты. В выпадающем списке нужно выбрать имя рассчитанной задачи теплового анализа и, если необходимо, время, которому должен соответствовать результат. Необходимо учитывать, что для использования в качестве начальной температуры результатов теплового расчёта нужно соблюсти определенные условия:

1. Условие идентичности конечно-элементных сеток обоих тепловых расчётов. Наиболее простым способом достижения такой идентичности является использование команды «Копия», доступной из контекстного меню. Последовательность действий может быть, например, следующей:

- а) создаём задачу типа «Тепловой анализ», генерируем сетку, определяем граничные условия, считаем. Предполагаем, что температуры, полученные в результате решения, будут использоваться для задания начальных температур в другой задаче нестационарного теплового анализа;
- б) используя команду **«Копия»**, создаём копию задачи;
- в) определяем граничные условия нестационарной задачи теплового анализа. На закладке «Параметры» свойств задачи выбираем имя первой задачи и, если это был нестационарный расчёт, нужный временной шаг.

В результате получаем две задачи разного типа с одинаковыми конечно-элементными сетками.

2. В обеих задачах режим «Производить расчёт линейным элементом» на закладке «Расчёт» диалога параметров задачи должен иметь **одинаковую** установку. Например, если первый тепловой расчёт осуществлялся линейным элементом, то и второй тепловой расчёт с



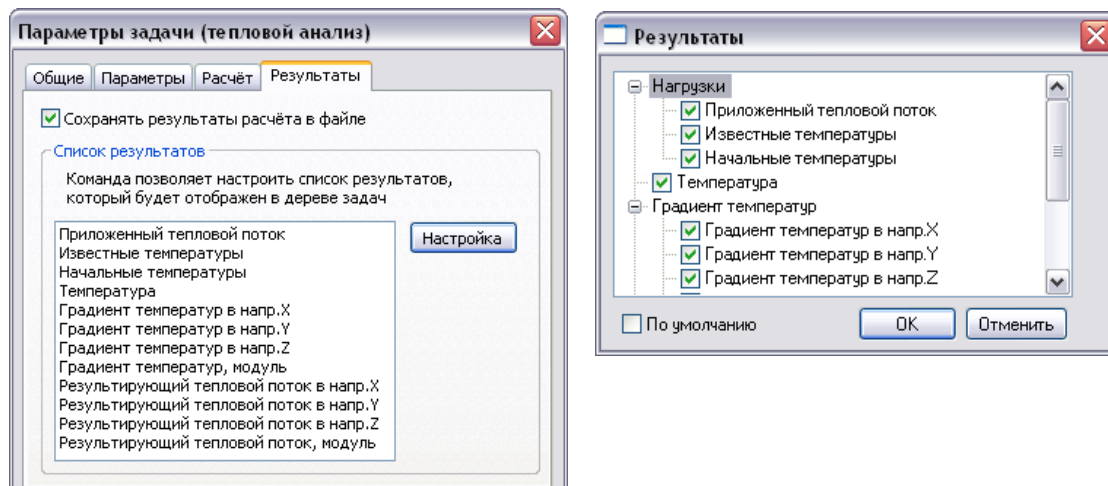
Закладка «Параметры» окна параметров задачи теплового анализа



использованием результатов теплового расчёта, можно осуществить только линейным элементом.

Отметим также, что решение задачи нестационарной теплопроводности требует больше машинного времени по сравнению со стационарной теплопроводностью, так как в этом случае системы алгебраических уравнений решаются на каждом временном шаге, определённом пользователем.

Закладка **[Результаты]** позволяет определить типы отображаемых в дереве задач результатов после завершения теплового расчёта.



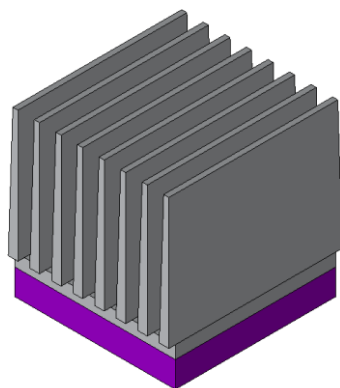
Закладка «Результаты» (слева) и диалог настройки результатов, отображаемых по умолчанию в дереве задач (справа)

## Примеры тепловых расчётов

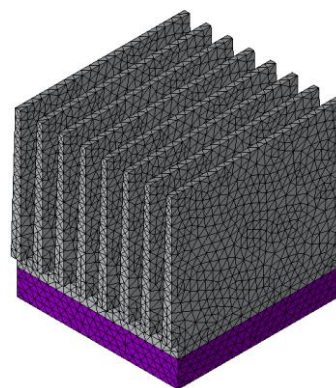
### Тепловой расчёт радиатора охлаждения. Установившийся режим

Необходимо оценить эффективность пассивного радиатора охлаждения полупроводникового электронного устройства с максимальной рассеиваемой мощностью 15 Ватт. Допустимая температура корпуса микросхемы составляет  $75^{\circ}\text{C}$  в диапазоне температур эксплуатации окружающей среды от  $25^{\circ}\text{C}$  до  $55^{\circ}\text{C}$ . Для охлаждения устройства используется радиатор из алюминиевого сплава, закрепляемый на верхней части корпуса микросхемы. Корпус микросхемы для улучшения теплоотвода также выполнен из алюминия.

**Шаг 1. Создание «Задачи», сетки, назначение материала.** Используя команды **«Анализ|Новая задача»** создадим задачу типа «Тепловой анализ» на основе двух тел – микросхемы и радиатора. Построим конечно-элементную сетку. Также необходимо определить параметры материала изделия. По умолчанию, в расчёте используются характеристики материала «С операции», т.е. свойства материала автоматически берутся из твердотельной модели детали изделия. Этот режим особенно удобно использовать, если в расчёте участвуют тела из разных материалов в составе сборочных моделей. В нашем случае, при создании 3D модели радиатора и микросхемы был определен материал «Алюминий», физико-химические свойства которого содержатся в базе T-FLEX CAD 3D.

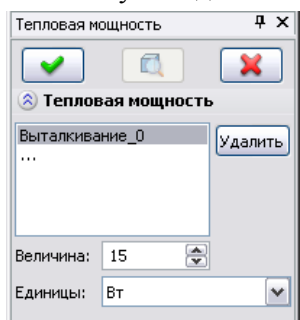


Трёхмерная модель микросхемы с пассивным радиатором охлаждения

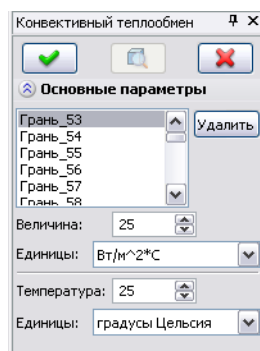
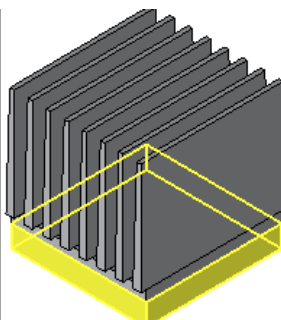


Созданная конечно-элементная сетка

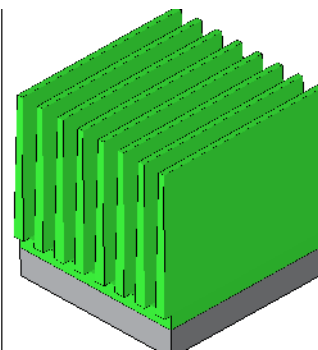
**Шаг 2. Наложение граничных условий.** Зададим для нашей модели тепловые нагружения. К объёму микросхемы приложим нагрузку «Тепловая мощность» 15 Вт, а на внешних теплоотводящих поверхностях радиатора определим граничное условие «Конвективный теплообмен» с параметром конвекции  $25 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  и температурой окружающей среды ( $25^\circ\text{C}$ ). Учёт теплообмена за счёт взаимного и окружающего излучения в данной задаче можно пренебречь, т.к. вклад от излучения на ожидаемых температурах (десятки градусов) пренебрежимо мал. Выполнив команды построения конечно-элементной сетки и задания тепловых нагрузок, мы получаем готовую к расчёту конечно-элементную модель.



Задание нагрузки «Тепловая мощность»



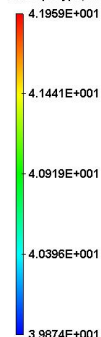
Задание нагрузки «Конвективный теплообмен»



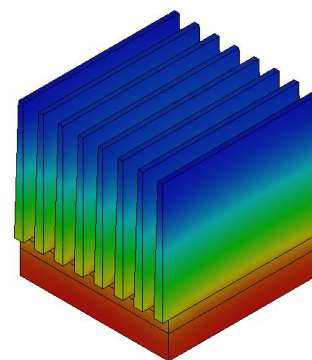
**Шаг 3. Выполнение расчёта и анализ результатов.** С помощью команды «Анализ|Расчёт» запустим тепловой расчёт. В появившемся диалоге свойств задачи на закладке [Параметры] установим опцию «Установившийся режим». Для ускорения расчёта включаем режим «Производить расчёт линейным элементом» на закладке [Расчёт].

Список результатов расчёта отображается в окне «Задачи», и открывается с помощью контекстного меню в окне результатов расчёта. Максимальная температура по результатам теплового расчёта составляет  $41,9^\circ\text{C}$  при температуре конвекции  $25^\circ\text{C}$ . Используя команду «Изменить» контекстного меню дерева задач, отредактируем температуру конвективного теплообмена, установив для окружающей среды верхний предел заданный рабочей температуры ( $55^\circ\text{C}$ ), и осуществим повторный расчёт.

Задача: "Стационарный тепловой расчёт"  
Температура, С



Температурные поля радиатора при температуре конвекции  $25^\circ\text{C}$

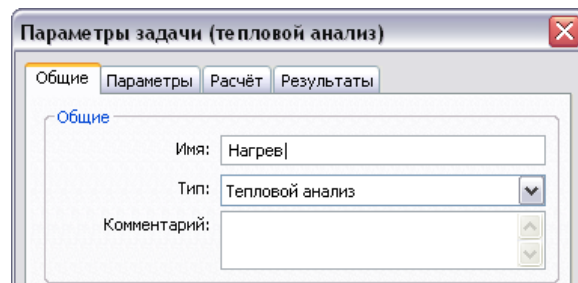


Получим максимальную температуру микросхемы 71,9 °С. Таким образом, радиатор обеспечивает требуемый температурный режим устройства во всем заданном режиме температур эксплуатации устройства. **Расчёт закончен.**

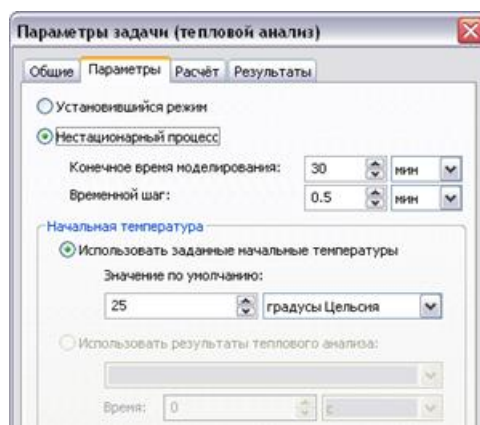
### Расчёт времени нагревания радиатора охлаждения. Нестационарный режим

Оценим время, необходимое для выхода устройства на установившийся тепловой режим. Для этого осуществим нестационарный тепловой расчёт системы «микросхема+радиатор».

**Шаг 1. Создание копии задачи.** Используя команду контекстного меню дерева задач «Копия», создадим копию исходной задачи стационарного теплового расчёта. На закладке **[Общие]** свойств задачи изменим наименование задачи на «Нагрев».

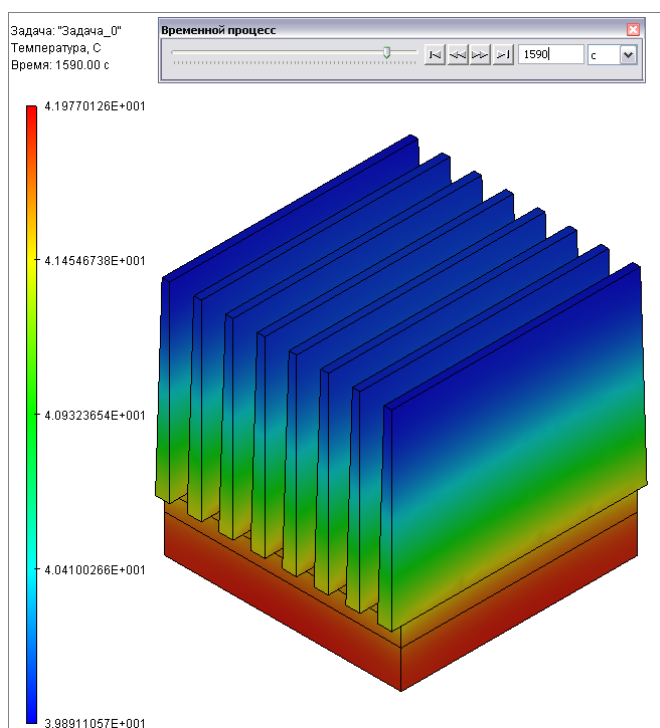


**Шаг 2. Задание параметров нестационарного расчёта.** На закладке **[Параметры]** свойств теплового расчёта установим режим «Нестационарный процесс». Зададим параметры временного анализа – время моделирования 30 мин, шаг моделирования 0.5 минуты. В качестве начальной температуры модели установим равномерную температуру окружающей среды (25°C).



Задание расчётных параметров нестационарного теплового расчёта – времени и начальной температуры

**Шаг 3. Выполнение расчёта и анализ результатов.** После завершения расчёта для анализа доступны результаты на каждом временном шаге. Для просмотра таких результатов используем плавающую панель «Временной процесс», позволяющую при помощи ползунка быстро переключаться в интересующий момент времени. Используя эти инструменты, определяем, что практически полный прогрев радиатора произойдет примерно через 26 минут.



Окно с результатом теплового расчёта в момент времени 1590 с (26 мин.)

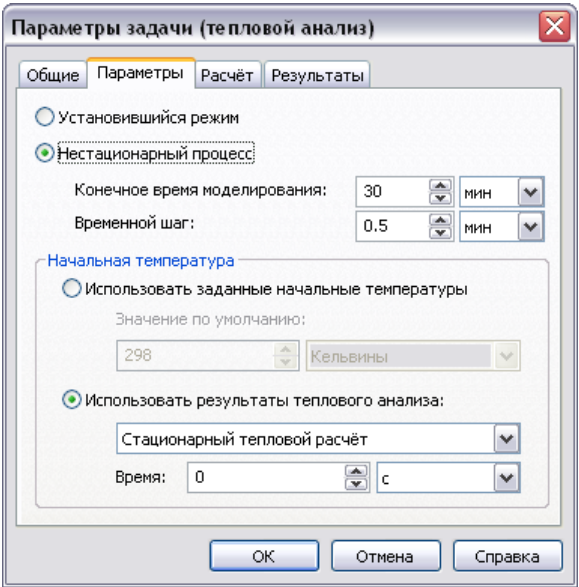
### Расчёт времени остывания радиатора охлаждения. Нестационарный режим

Оценим теперь время, необходимое для остывания радиатора охлаждения устройства после длительной работы.

**Шаг 1. Создание копии задачи. Коррекция граничных условий.** Создадим копию исходной задачи стационарного теплового расчёта. При создании копии задачи появляется диалог «Копия задачи». Снятие флажка «Копировать сетку» приведёт к тому, что в разных задачах будут использоваться *одна и та же* сетка. Такой режим копирования обеспечивает *идентичность* конечно-элементных сеток двух или нескольких задач. Назовём новую задачу «Охлаждение».

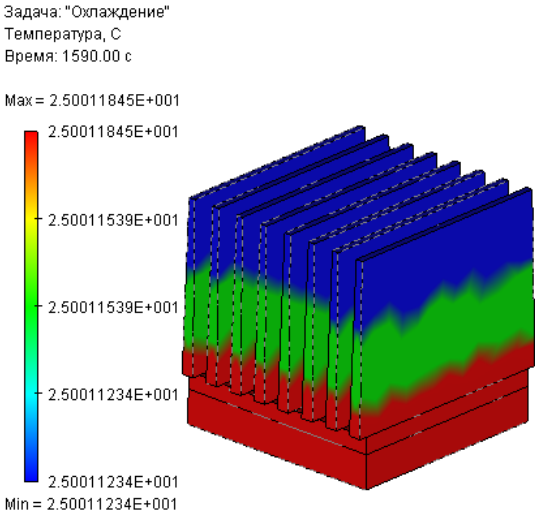
Откорректируем граничные условия задачи «Охлаждение». Для этого из контекстного меню дерева задач командой **«Удалить»** удаляем из задачи «Охлаждение» нагрузку «Тепловая мощность». Теперь задача «Охлаждение» готова к заданию параметров расчёта.

**Шаг 2. Задание параметров нестационарного расчёта.** На закладке свойств теплового расчёта установим режим «Нестационарный процесс». Зададим параметры временного анализа – время моделирования 30 мин, шаг моделирования 0.5 минуты. В качестве начальной температуры модели установим результат предыдущего стационарного расчёта радиатора.



Настройка параметров задачи при расчёте процесса охлаждения (нестационарная теплопроводность)

**Шаг 3. Анализ результатов расчёта.** Осуществим расчёт и проанализируем полученные результаты. Используя панель «Временной процесс» определяем, что практически полное остывание радиатора произойдет примерно через 26 минут, после выключения устройства.



Расчёт охлаждения устройства.  
Поле температур на 1590 секунде расчётного времени

## ВЕРИФИКАЦИОННЫЕ ПРИМЕРЫ

В данной главе рассмотрено решение некоторых задач, имеющих аналитическое решение с целью оценки точности работы системы конечно-элементного анализа. Все приведенные здесь примеры можно найти в библиотеке файлов «Верификационные примеры».

Каждый верификационный пример содержит описание постановки физической задачи, описание её конечно-элементной постановки, а также результаты конечно-элементного моделирования с оценкой относительной погрешности полученных результатов относительно аналитического решения, которое принимается за "точное". В некоторых задачах приводятся также графики относительных погрешностей в зависимости от степени конечно-элементной дискретизации.

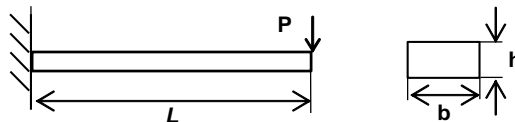
В файлах верификационных примеров содержатся решенные задачи, соответствующие данному описанию. Для некоторых задач, имеющих большое количество результатов (например, вынужденные колебания), результаты в поставляемой библиотеке верификационных примеров могут быть не сохранены (для уменьшения размера файла). В этом случае, чтобы увидеть результаты конечно-элементного моделирования, нужно пересчитать такие задачи.

*Примечание. Обращаем внимание, что результаты конечно-элементных расчётов зависят от конечно-элементной сетки, поэтому численные значения результатов, приведенные в таблицах, а также их относительные погрешности, могут несколько отличаться от результатов, сохраненных в файлах. Это нормальное явление для приближённых численных расчётов.*

### Примеры расчётов задач статики

#### Изгиб консольно-защемлённой балки под действием сосредоточенной нагрузки

Рассмотрим консольно-защемлённую балку длиной  $L$ , которая нагружена силой  $P$  на правом конце. Поперечным сечением балки является прямоугольник с шириной  $b$  и высотой  $h$ .



Требуется определить максимальные прогибы балки.

Примем  $P=2000$  Н,  $L=0.5$  м,  $b=0.05$  м,  $h=0.02$  м. Характеристики материала оставим заданными по умолчанию: модуль упругости  $E = 2.1E+011$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.28$ .

Левый торец балки закрепим, а на правый приложим нагрузку величиной  $P$ , направленную вертикально вниз.

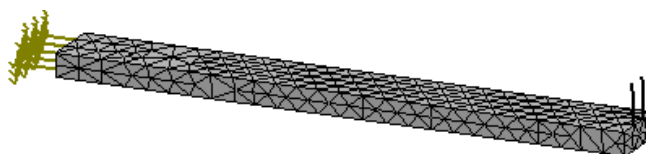


Рисунок 1.1-1 - Расчетная модель с нагрузками и закреплениями

Конечно-элементная модель балки с нагрузками и закреплениями  
Аналитическое решение имеет вид [1, с.215]:

$$w = \frac{Pl^3}{3EJ} = 1.1905 \times 10^{-2} \text{ м},$$

где  $P$  – сила,  $l$  – длина балки,  $E$  – модуль упругости материала,  $J = \frac{b \cdot h^3}{12}$  – момент инерции сечения.

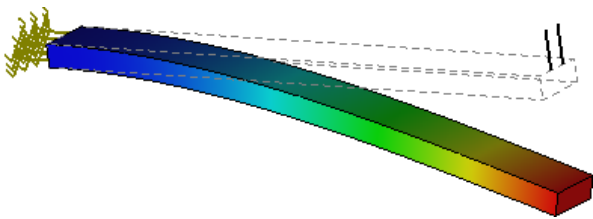
Выполнив расчет при помощи T-FLEX Анализ, получаем следующие результаты:

**Таблица** 1.  
**Параметры конечно-элементной сетки**

Тип конечных элементов	Число узлов	Число конечных элементов
квадратичный тетраэдр (10 узлов)	315	764

**Таблица** 2.  
**Результат «Перемещение»**

Численное решение Перемещение $w^*$ , м	Аналитическое решение Перемещение $w$ , м	Ошибка $\delta = \frac{ w - w^* }{ w } \times 100\%$
1.1826E-002	1.1905E-002	0.66



**Рисунок 1.1-2 – Перемещения точек балки**

**Вывод:**  
Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила 0,7% для квадратичного конечного элемента.



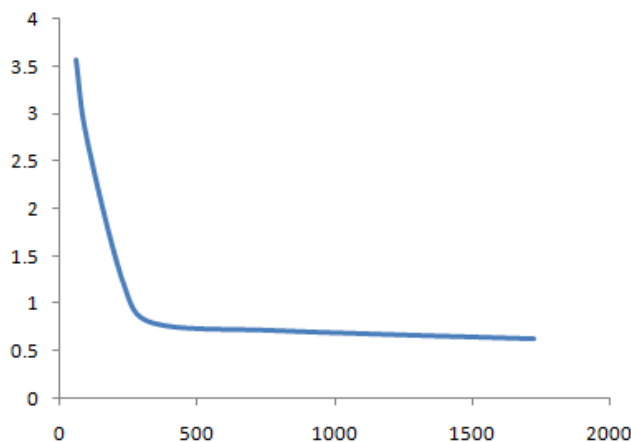
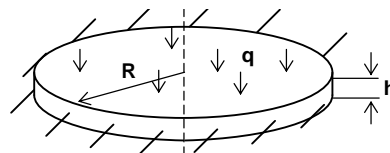


Рисунок 1.1-3 - Зависимость относительной погрешности от числа КЭ

### Статический расчет круглой пластины, защемленной по контуру

Необходимо определить максимальные прогибы круглой пластины радиуса  $R$  и толщины  $h$ , которая защемлена по контуру и нагружена равномерным давлением  $q$ , распределенным по верхней грани пластины.



Вследствие симметрии задачи будем рассматривать одну четвертую часть пластины.

Примем радиус пластины равным  $R = 0.2$  м, толщину  $h = 0.003$  м, давление  $q = 10$  кН/м<sup>2</sup>. Характеристики материала оставим заданными по умолчанию: модуль упругости  $E = 2.1\text{E}+011$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.28$ .

Далее необходимо наложить граничные условия. Боковую поверхность пластины закрепляем полностью, а на грани, которые оказались свободными после отбрасывания  $\frac{3}{4}$  пластины, накладываем частичные ограничения по нормали к граням, так как точки этого сечения по условиям симметрии не могут получить преимущественных смещений в нормальном направлении. На верхнюю грань пластины прикладываем давление величиной  $10$  кН/м<sup>2</sup>.

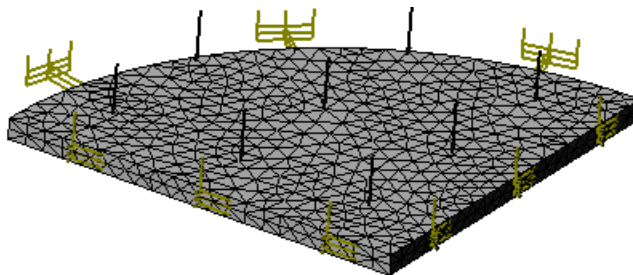


Рисунок 1.2-1 - Конечно-элементная модель пластины с нагрузками и закреплениями

Для данной задачи известно аналитическое решение. Прогиб в центре пластины вычисляется по формуле [1, с.566]:



$$w = \frac{qR^4}{64D} = 4.8762 \times 10^{-4} \text{ м},$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – изгибная жесткость,  $q$  – величина давления,  $R$  – радиус пластины.

Напряжения на контуре пластины вычисляются по формуле:

$$\sigma = 0.75q\left(\frac{R}{h}\right)^2 = 3.3333 \times 10^7 \text{ Па}.$$

Выполнив расчет при помощи T-FLEX Анализ, получаем следующие результаты:

Таблица 1.  
Параметры конечно-элементной сетки

Тип конечных элементов	Число узлов	Число конечных элементов
квадратичный тетраэдр (10 узлов)	3981	11794

Таблица 2.  
Результат «Перемещение»

Численное решение Перемещение $w^*$ , м	Аналитическое решение Перемещение $w$ , м	Ошибка $\delta = \frac{ w - w^* }{ w } \times 100\%$
4.8681E-004	4.8762E-004	0.16

Таблица 3.  
Результат «Напряжение»

Численное решение Напряжение $\sigma^*$ , $\frac{H}{м^2}$	Аналитическое решение Напряжение $\sigma$ , $\frac{H}{м^2}$	Ошибка $\delta = \frac{ \sigma - \sigma^* }{ \sigma } \times 100\%$
3.0057E+007	3.3333E+007	9.83

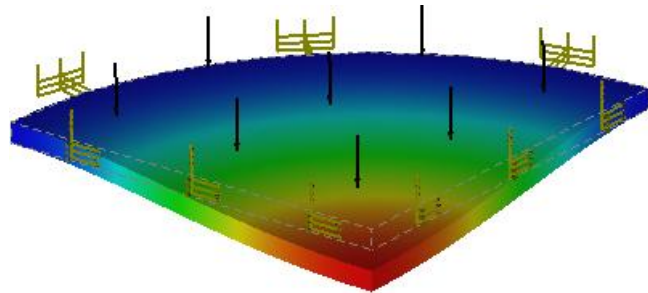


Рисунок 1.2-2 - Перемещения точек пластины

### Вывод:

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила 0,16% по перемещениям и 9,8% по напряжениям для квадратичного конечного элемента. Изменение относительной погрешности с ростом числа квадратичных КЭ показано на графике.

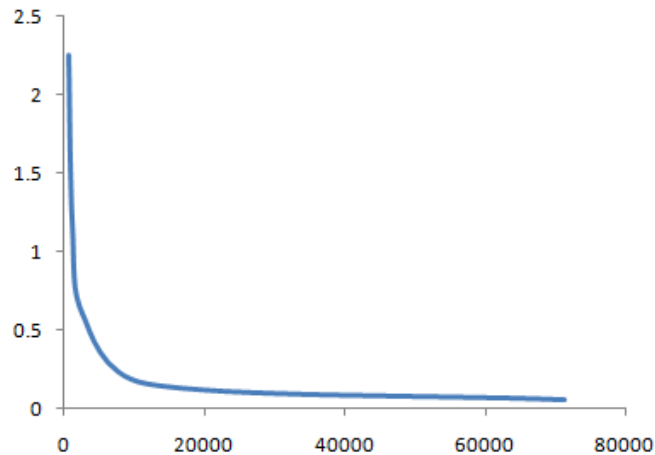


Рисунок 1.2-3 - Зависимость относительной погрешности от числа КЭ

### Расчет сферического сосуда давления

Имеется сферический сосуд с внутренним радиусом  $r$  и внешним радиусом  $R$ . На сосуд действуют внутреннее давление  $p_0$  и внешнее  $p_1$ . Необходимо определить перемещения внутренней стенки сосуда.

Вследствие симметрии задачи будем рассматривать одну восьмую часть сферы. Примем следующие исходные данные:

внутренний радиус  $r=0.4$  м,

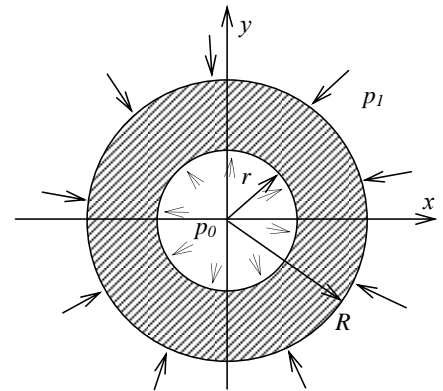
внешний радиус  $R=0.415$  м,

внутреннее давление  $p_0=200$  МПа,

внешнее давление  $p_1=120$  МПа.

Характеристики материала примем  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu = 0.28$ .

Как и в предыдущей задаче, необходимо наложить граничные условия, учитывающие воздействие отброшенной части сферы. В данном случае необходимо ограничить по нормали перемещения точек всех плоских граней. На внутреннюю и внешнюю грани прикладываем давления 200 МПа и 120 МПа соответственно.



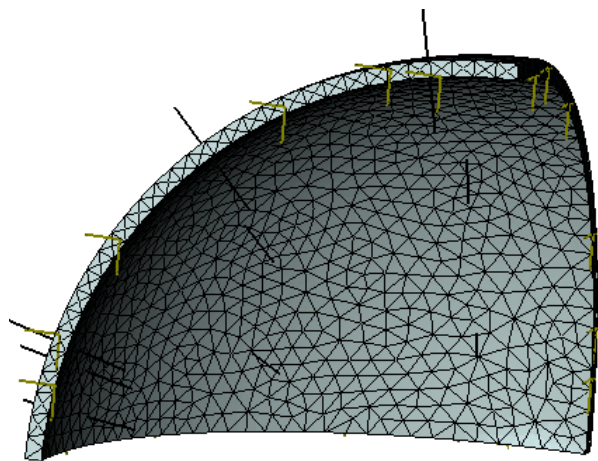


Рисунок 1.3-1 - Конечно-элементная модель одной восьмой части сферы с нагрузками и закреплениями

Перемещение внутренней поверхности сферы можно рассчитать по формуле [1, с.737]:

$$U = A \cdot r + \frac{B}{r^2} = 1.4063 \text{ мм},$$

где  $A = \frac{\frac{P_1}{r^3} - \frac{P_0}{R^3}}{(2\mu + 3\lambda) \cdot \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right)}, B = \frac{P_1 - P_0}{4\mu \cdot \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right)}, \mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}, \lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)}.$

В сферической системе координат выражения для напряжений имеют вид:

$$\sigma_{\rho}(\rho) = \frac{r^{-3}P_1 - R^{-3}P_0}{(R^{-3} - r^{-3})} - \frac{(P_1 - P_0)}{(R^{-3} - r^{-3})}\rho^{-3}, \sigma_t(\rho) = \frac{r^{-3}P_1 - R^{-3}P_0}{(R^{-3} - r^{-3})} + \frac{(P_1 - P_0)}{2 \cdot (R^{-3} - r^{-3})}\rho^{-3}.$$

Эквивалентные напряжения определяются по формуле:

$$\sigma_{\text{экв}}(\rho) = \sqrt{(\sigma_{\rho}(\rho))^2 + (\sigma_t(\rho))^2 - 2 \cdot \sigma_{\rho}(\rho) \cdot \sigma_t(\rho)}.$$

Эквивалентные напряжения на внутренней поверхности сферы равны  $\sigma_{\text{экв}}(r) = 1148 \text{ МПа}.$

Выполнив расчет при помощи T-FLEX Анализ, получаем следующие результаты:

Таблица

Параметры конечно-элементной сетки

Тип конечных элементов	Число узлов	Число конечных элементов
квадратичный тетраэдр (10 узлов)	1846	5338

1.

2.

Таблица  
Результат «Перемещение»

Численное решение Перемещение $w^*$ , м	Аналитическое решение Перемещение $w$ , м	Ошибка $\delta = \frac{ w - w^* }{ w } \times 100\%$
1.4068E-003	1.4063E-003	0.03

3.

Таблица  
Результат «Эквивалентные напряжения»

Численное решение Напряжение $\sigma^*$ , $\frac{H}{M^2}$	Аналитическое решение Напряжение $\sigma$ , $\frac{H}{M^2}$	Ошибка $\delta = \frac{ \sigma - \sigma^* }{ \sigma } \times 100\%$
1.1508E+009	1.1480E+009	0.24

**Квадратная пластина под силой в центре (пластинчатый КЭ)**

Рассматривается жестко закреплённая квадратная пластина под сосредоточенной силой в центре [4]. Задача статического анализа решается с использованием пластинчатых конечных элементов. В расчёте рассматривается  $\frac{1}{4}$  часть пластины с наложением условий симметрии на соответствующих гранях (ограничение перемещений в направлении оси локальной системы координат, нормальной к плоскости грани; ограничение поворотов).

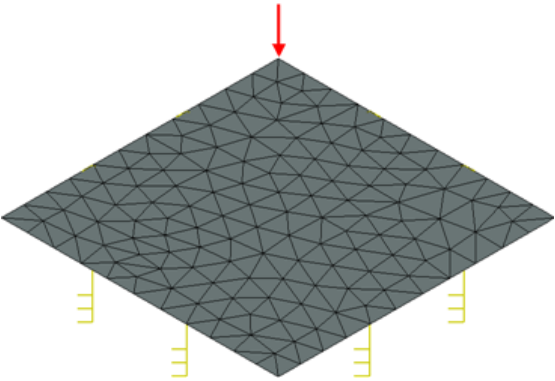
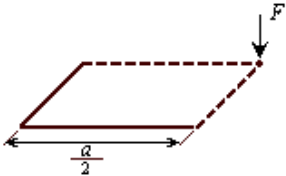


Рисунок 1.4-1 - Конечно-элементная модель пластины с нагрузками и закреплениями

Решение этой задачи для прогиба под силой даёт формула:  $w = 0.0224 \frac{Pa^2}{D}$ ,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ .

Примем следующие исходные данные: длина и ширина пластины  $a = 500\text{мм}$ , толщина пластины  $h = 3\text{мм}$ , приложенная сосредоточенная сила  $P = 50\text{кгс}$  (или  $P = 490.3325\text{Н}$ ).

Характеристики материала примем  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{Па}$ ,  $\nu = 0.28$ .

Аналитическое решение имеет вид:  $w = 5.3557 \times 10^{-3} \text{ м}$ .

Выполнив расчет при помощи T-FLEX Анализ, получили следующие результаты:

**Таблица**

**1.**

**Параметры конечно-элементных сеток**

Но мер сет ки	Тип конечных элементов	Число узлов	Число конечных элементов
1	квадратичный тетраэдр (10 узлов)	8083	24222
2	линейный треугольник (6 узлов)	3818	7426
3	квадратичный треугольник (6 узлов)	3818	7426

**Таблица**

**2.**

**Результат «Перемещение»**

Но мер сет ки	Численное решение Перемещение $w^*, \text{м}$	Аналитическое решение Перемещение $w, \text{м}$	Ошибка $\delta = \frac{ w - w^* }{ w } \times 100\%$
1	5.3702E-003	5.3557E-003	0.27
2	5.4078E-003	5.3557E-003	0.97
3	5.3763E-003	5.3557E-003	0.38

### Цилиндрический резервуар со стенками постоянной толщины

Резервуар подвергается действию давления жидкости, как показано на рисунке. Днище резервуара закреплено в абсолютно жесткий фундамент.

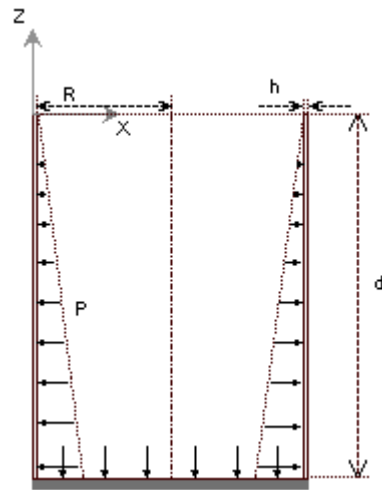


Рисунок 1.5-1 – Расчетная схема

На практике толщина стенки резервуара  $h$  бывает в большинстве случаев мала в сравнении как с радиусом  $R$ , так и с глубиной  $d$  резервуара. Учитывая это и тот факт, что днище резервуара не испытывает деформаций, в качестве конечно-элементной модели резервуара можно рассматривать цилиндрическую оболочку, нижний край которой закреплён.

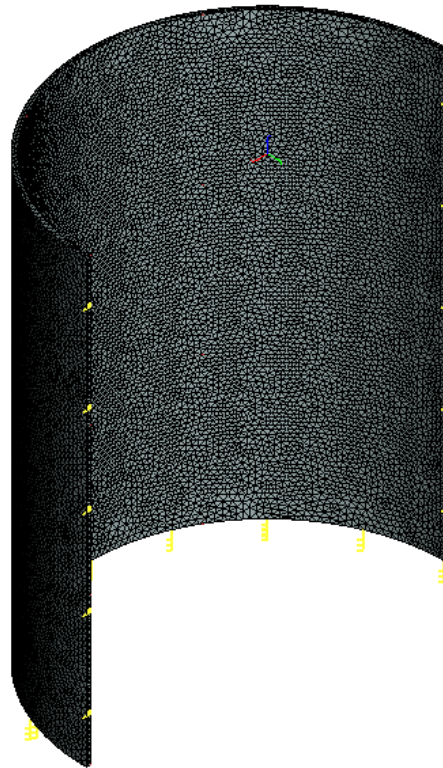


Рисунок 1.5-2 - Конечно-элементная модель конструкции с нагрузками и закреплениями

Аналитическое решение этой задачи имеет вид [5]:

$$w = e^{-\beta \hat{z}} \left( C_1 \cos(\beta \hat{z}) + C_2 \sin(\beta \hat{z}) \right) - \frac{\rho g (d - \hat{z}) R^2}{Eh},$$

где

$$\hat{z} = z + d, \quad C_1 = \frac{\rho g R^2 d}{Eh}, \quad C_2 = \frac{\rho g R^2}{Eh} \left( d - \frac{1}{\beta} \right), \quad \beta^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2},$$

$\rho$  - плотность жидкости,  $g$  - ускорение свободного падения ( $g = 9.807 \text{ м/с}^2$ )

Примем следующие исходные данные: глубина резервуара  $d = 1000 \text{ мм}$ , радиус  $R = 400 \text{ мм}$ , толщина резервуара  $h = 10 \text{ мм}$ , плотность жидкости  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ .

Характеристики материала примем:  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\nu = 0.28$ .

Таким образом,  $w = 6.7327 \times 10^{-7} \text{ м}$  (при максимуме в  $\hat{z} = 0.134 \text{ м}$  от основания – см. график).

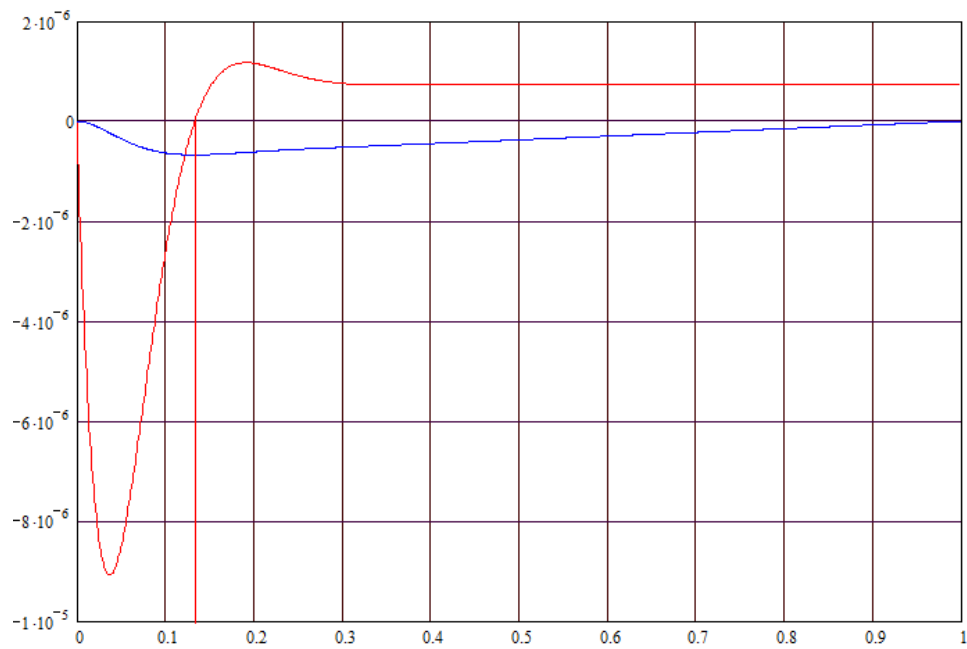


Рисунок 1.5-3 – Зависимость перемещения от высоты сосуда, м

Выполнив расчет при помощи T-FLEX Анализ, получили следующие результаты:

Таблица

Параметры конечно-элементных сеток

Н	Тип конечных элементов	Число узлов	Число конечных
---	------------------------	-------------	----------------

1.

о м е р с е т к и			элементов
1	квадратичный тетраэдр (10 узлов)	24325	74887
2	линейный треугольник (6 узлов)	4549	8864
3	квадратичный треугольник(6 узлов)	4549	8864

Таблица

2.

Результат «Перемещение»

Но мер сет ки	Численное решение Перемещение $w^*$ , $m$	Аналитическое решение Перемещение $w$ , $m$	Ошибка $\delta = \frac{ w - w^* }{ w } \times 100\%$
1	6.8665 E-007	6.7327E-007	1.98
2	6.9118E-007	6.7327E-007	2,66
3	6.9023E-007	6.7327E-007	2,52

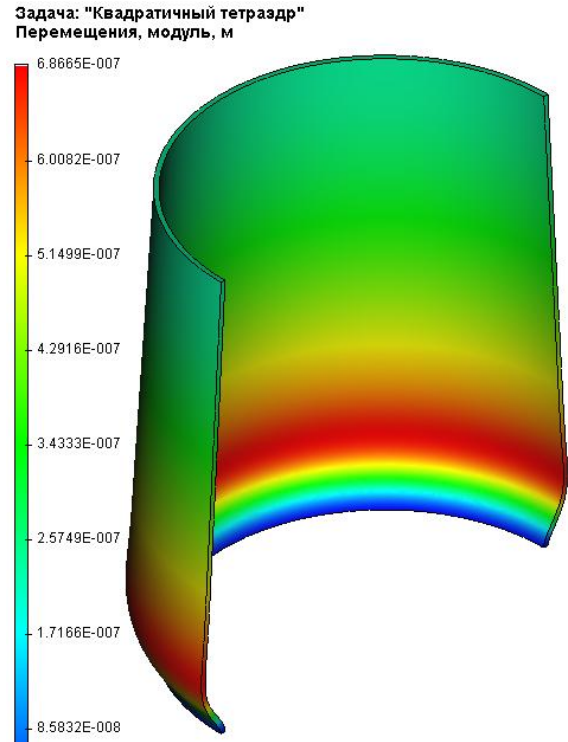


Рисунок 1.5-4 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (перемещения)

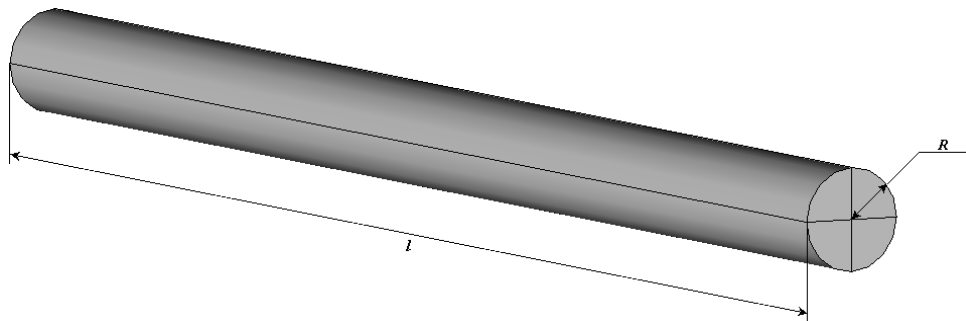


**Вывод:**

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим по перемещениям составила 2% для квадратичного тетраэдрального КЭ и 2,6-2,5% для треугольного линейного/квадратичного конечного элемента – при этом требуется в 8,4 раз меньшее число КЭ.

**Кручение бруса с круглым поперечным сечением**

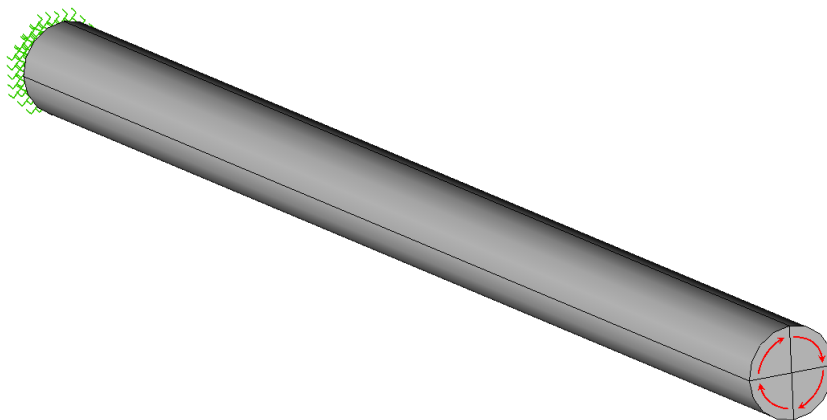
Рассмотрим брус с круглым поперечным сечением радиуса  $R$ . Длина бруса  $l$  (см. рис.).



**Рисунок 1.6-1 – Круглый брус с размерами**

Выберем систему координат с осью  $z$  вдоль оси бруса, при этом  $z = 0$  на его левом конце.

Брус находится под действием внешнего скручивающего момента  $M_{кр}$ . Момент приложен на правом конце бруса, левый конец бруса жёстко закреплён.



**Рисунок 1.6-2 – Расчетная модель с нагрузками и закреплениями**

Примем следующие исходные данные: длина  $l$  бруса равна  $0.6\text{ м}$ , радиус поперечного сечения  $R$  бруса равен  $0.02\text{ м}$ , величина приложенного крутящего момента  $M_{кр} = 100\text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Характеристики материала:  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\nu = 0.28$ .

Для определения угла закручивания воспользуемся соотношением [6]:

$$\varphi = \int_0^z \frac{M_{\varphi}}{GJ_p} dz + \varphi_0,$$

где  $\varphi_0$  – угол поворота сечения  $z = 0$ ,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  – модуль сдвига,  $J_p = \frac{\pi R^4}{2}$  – полярный момент инерции круглого сечения.

Так как, по условию, левый конец бруса жёстко закреплён, то  $\varphi_0 = 0$ . Тогда на расстоянии  $z = 0.5l$  от жёстко закреплённого конца бруса угол закручивания  $\varphi$  определяется формулой:

$$\varphi_{0.5l} = \frac{0.5M_{\text{кр}}l}{GJ_p}$$

Таким образом,  $\varphi_{0.5l} = 1.4551 \times 10^{-3} \text{ рад}$ .

Выполнив расчет при помощи T-FLEX Анализ, получаем следующие результаты.

**Таблица**

**1.**

**Параметры конечно-элементной сетки**

Тип конечных элементов	Число главных узлов	Число узлов при расчёте задачи	Число конечных элементов
квадратичный тетраэдр (10 узлов)	4509	89457	18264

Модуль перемещения (при  $z = 0.5l$ )  $\Delta u = 2.9095 \text{E-}005 \text{ м}$ .

**Таблица**

**2.**

**Результат «Угол закручивания»**

Численное решение Угол закручивания $\psi = \arcsin\left(\frac{\Delta u}{R}\right), \text{ рад}$	Аналитическое решение Угол закручивания $\varphi$ , $\text{рад}$	Ошибка $\delta = \frac{ \varphi - \psi }{ \varphi } \times 100\%$
1.4547E-003	1.4551E-003	0.027

**Вывод:**

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила 0,027%.

Стержень под действием собственного веса

Рассмотрим стержень радиуса  $R$  и длиной  $l$ , подвешенный за верхний конец и растягиваемый собственным весом (см. рис.).

Примем следующие исходные данные: длина стержня  $l$  равна  $1\text{ м}$ , радиус поперечного сечения стержня  $R$  равен  $0.02\text{ м}$ .

Характеристики материала:  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\nu = 0.28$ ,  $\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

Полное удлинение стержня под действием собственного веса можно определить по формуле [7]:

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E},$$

где  $\gamma$  – удельный вес материала стержня, то есть  $\gamma = \rho \cdot g$ ,  $g = 9.80665 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ .

Напряжение в сечении стержня, находящемся на расстоянии  $x$  от нижнего (незакрепленного) конца, можно вычислить по формуле [7]:

$$\sigma = \gamma \cdot x.$$



Рисунок 1.7-1 – расчетная модель

Таким образом,  $\Delta l = 1.8212 \times 10^{-7} \text{ м}$ ;  $\sigma = 3.8246 \times 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$  при  $x = \frac{l}{2}$ .

Выполнив расчет при помощи T-FLEX Анализ, получаем следующие результаты:

Таблица

Параметры конечно-элементной сетки

Тип конечных элементов	Число главных узлов	Число узлов при расчёте задачи	Число конечных элементов
квадратичный тетраэдр (10 узлов)	2482	16089	9518

Таблица

Результат «Перемещение»

Численное решение Перемещение $w^*$ , м	Аналитическое решение Перемещение $w$ , м	Ошибка $\delta = \frac{ w - w^* }{ w } \times 100\%$
1.8177E-007	1.8212E-007	1.9410E-001

Таблица  
Результат «Напряжение»

Численное решение Напряжение $\sigma^*$ , $\frac{H}{M^2}$	Аналитическое решение Напряжение $\sigma$ , $\frac{H}{M^2}$	Ошибка $\delta = \frac{ \sigma - \sigma^* }{ \sigma } \times 100\%$
3.8247E+004	3.8246E+004	8.0139E-003

**Вывод:**

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила 0,19% по перемещениям и 0,008% по напряжениям для квадратичного конечного элемента.

**Расчёт вращающегося сплошного диска постоянной толщины**

Рассмотрим диск радиуса  $R$  и толщиной  $h$  (см. рис.).

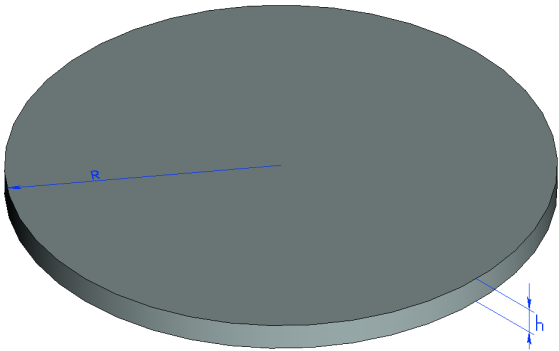


Рисунок 1.8-1 – Диск с размерами

В расчёте рассматривается  $\frac{1}{4}$  часть диска с наложением условий симметрии на соответствующих гранях (ограничение перемещений в направлении оси локальной системы координат, нормальной к плоскости грани).

Диск находится под действием центробежной силы  $F = \rho \cdot \omega^2 R$ , где  $\rho$  - масса единицы объёма материала диска,  $\omega$  - угловая скорость вращения.

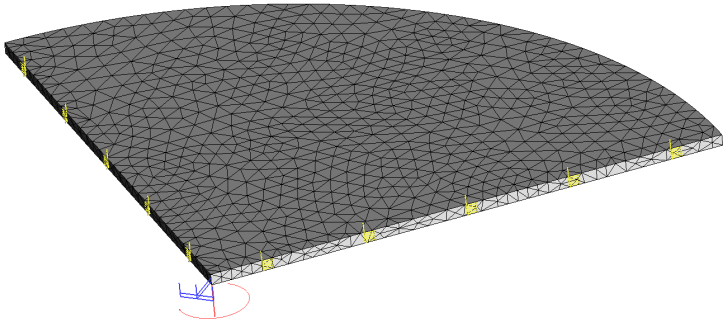


Рисунок 1.8-2 – Расчетная модель с нагрузками и закреплениями

Примем следующие исходные данные: радиус диска  $R$  равен  $0.457\text{ м}$ , толщина диска  $h$  равна  $0.01\text{ м}$ , величина угловой скорости вращения  $\omega$  равна  $300 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ .

Характеристики материала:  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\nu = 0.28$ ,  $\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

Перемещения  $u$  в таком случае можно определить по формуле [8]:

$$u = \frac{1}{E} \left( (1-\nu) C_1 r - (1-\nu) C_2 \frac{1}{r} - \frac{(1-\nu^2)}{8} \rho \omega^2 r^3 \right),$$

где постоянные  $C_1 = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 R^2$ ,  $C_2 = 0$  определяются из граничных условий.

Максимальное перемещение  $u_{\max}$  ожидается при  $r = R$ , то есть  $u_{\max} = \frac{(1-\nu) \rho \omega^2 R^3}{4E}$ .

Компоненты напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  находятся в виде [8]:

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (R^2 - r^2),$$

$$\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 R^2 - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2.$$

Эти напряжения принимают максимальное значение в центре диска, где

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 R^2$$

Таким образом,  $u_{\max} = 5.7430 \times 10^{-5} \text{ м}$ ,  $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma = 6.0111 \times 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ .

Выполнив расчет при помощи T-FLEX Анализ, получаем следующие результаты:

**Таблица**

**1.**

**Параметры конечно-элементной сетки**

Тип конечных элементов	Число главных узлов	Число аргументов	Число конечных элементов
квадратичный тетраэдр (10 узлов)	1545	26874	4340

**Таблица**

**2.**

**Результат «Перемещение»**

Численное решение Перемещение $w^*$ , м	Аналитическое решение Перемещение $w$ , м	Ошибка
--	--	--------

		$\delta = \frac{ w - w^* }{ w } \times 100\%$
5.8036E-005	5.7430E-005	1.0390E+000

Таблица

Результат «Напряжение»

3.

Численное решение Напряжение $\sigma^*$ , $\frac{H}{M^2}$	Аналитическое решение Напряжение $\sigma$ , $\frac{H}{M^2}$	Ошибка $\delta = \frac{ \sigma - \sigma^* }{ \sigma } \times 100\%$
6.4858E+007	6.0111E+007	7.9

### Свободно опертая прямоугольная пластинка под синусоидальной нагрузкой

Рассмотрим прямоугольную пластинку со сторонами  $a$ ,  $b$  и толщиной  $h$  (см. рис.).

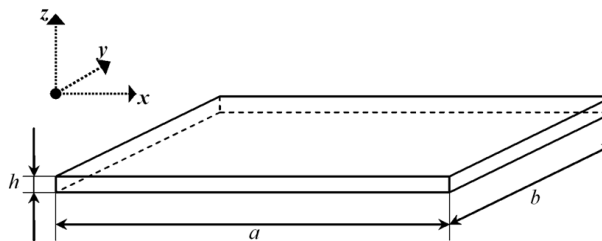


Рисунок 1.9-1 – Пластина с размерами

Толщина пластины  $h$  существенно меньше длин её сторон  $a$ ,  $b$ .

Пластина находится под действием нагрузки, распределённой по поверхности пластины согласно закону:  $q = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$ , где  $q_0$  представляет собой интенсивность нагрузки в центре пластинки.

Рассмотрим случай, когда края пластины свободно оперты.

Примем следующие исходные данные: длина стороны  $a$  пластины равна  $0.5m$ , длина стороны  $b$  пластины равна  $0.4m$ , толщина пластины  $h = 0.003m$ , интенсивность нагрузки в центре пластинки

$$q_0 = 100 \frac{H}{M^2}.$$

Характеристики материала:  $E = 2.1 \times 10^{11} Pa$ ,  $\nu = 0.28$ .

Аналитическое решение этой задачи имеет вид [5]:

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right),$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жесткость пластины.

Максимальный прогиб получается в центре пластинки. Подставив  $x = \frac{a}{2}$  и  $y = \frac{b}{2}$  в уравнение, получаем:

$$w_{\max} = \frac{q_0}{\pi^4 D \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}$$

Таким образом,  $w_{\max} = 1.9059 \times 10^{-5} \text{ м}$ .

В расчёте рассматривается  $\frac{1}{4}$  часть пластины с наложением условий симметрии на соответствующих гранях (ограничение перемещений в направлении оси локальной системы координат, нормальной к плоскости грани; ограничение поворотов).

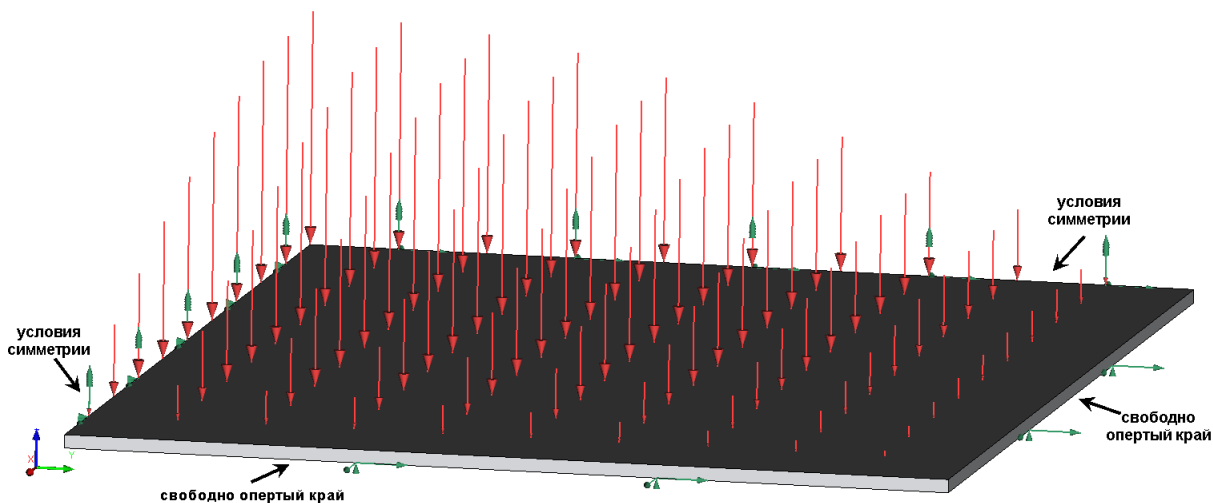


Рисунок 1.9-2 - Модель пластины с нагрузками и закреплениями

Выполнив расчет при помощи T-FLEX Анализ, получаем следующие результаты.

Таблица

Параметры конечно-элементных сеток

1.

Но ме р  с е т к и	Тип конечных элементов	Число узлов	Число аргументо в	Число конечных элементов

1	квадратичный тетраэдр (10 узлов)	5836	104094	17318
2	линейный треугольник (6 узлов)	2747	16472	5304
3	квадратичный треугольник(6 узлов)	10797	64782	5304

Таблица

2.

Результат «Перемещение»

Но мер сет ки	Численное решение Перемещение $w^*$ , м	Аналитическое решение Перемещение $w$ , м	Ошибка $\delta = \frac{ w - w^* }{ w } \times 100\%$
1	1.8742E-005	1.9059E-005	1.67
2	1.8798E-005	1.9059E-005	1.37
3	1.8752E-005	1.9059E-005	1.61



Задача: "треугольный КЭ (линейный)"  
Перемещения в напр. Z, м  
Масштаб перемещений: 664.97

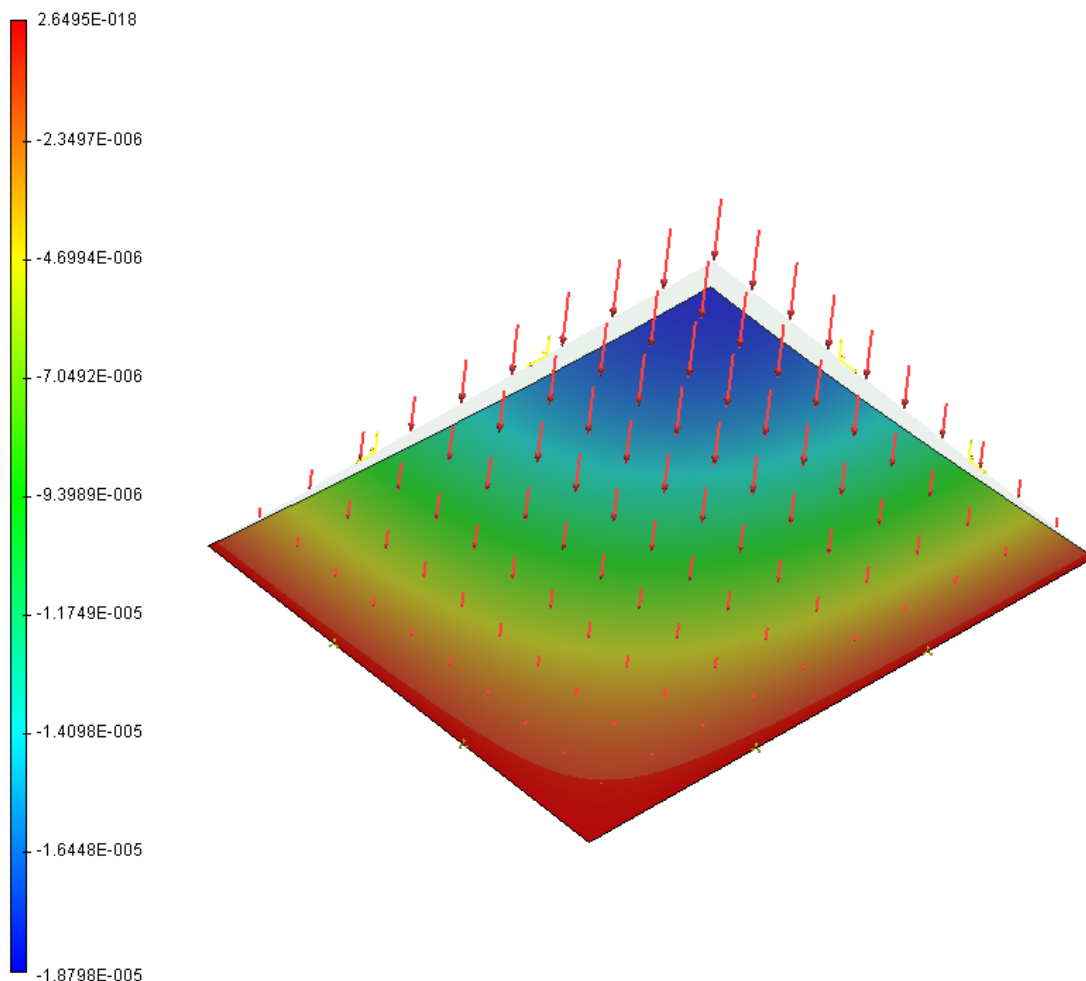


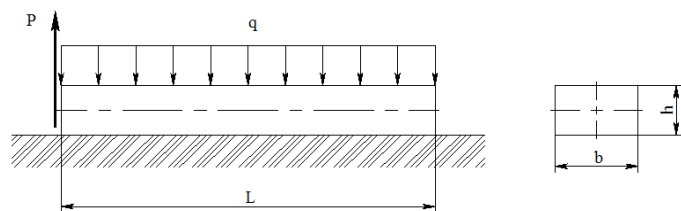
Рисунок 1.9-3 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (перемещения по Z)

**Вывод:**

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим по перемещениям составила 1,67% и 1,60% для квадратичного тетраэдрального и треугольного КЭ.

**Полубесконечная балка на упругом основании**

Рассмотрим балку на упругом основании. Длина балки  $L$ . В сечении балка образует прямоугольник с шириной  $b$  и высотой  $h$ .



Балка находится под равномерно распределенной нагрузкой  $q$ . Сила  $P$  приложена к левому концу балки.

Искомой величиной является максимальное перемещение. Примем следующие входные данные:  $q_L = 200$  Н/м,  $P = 1000$  Н,  $L = 5$  м,  $b = 0.05$  м,  $h = 0.02$  м. Характеристики материала (сталь):  $E = 2.1E+011$  Па,  $\nu = 0.28$ .

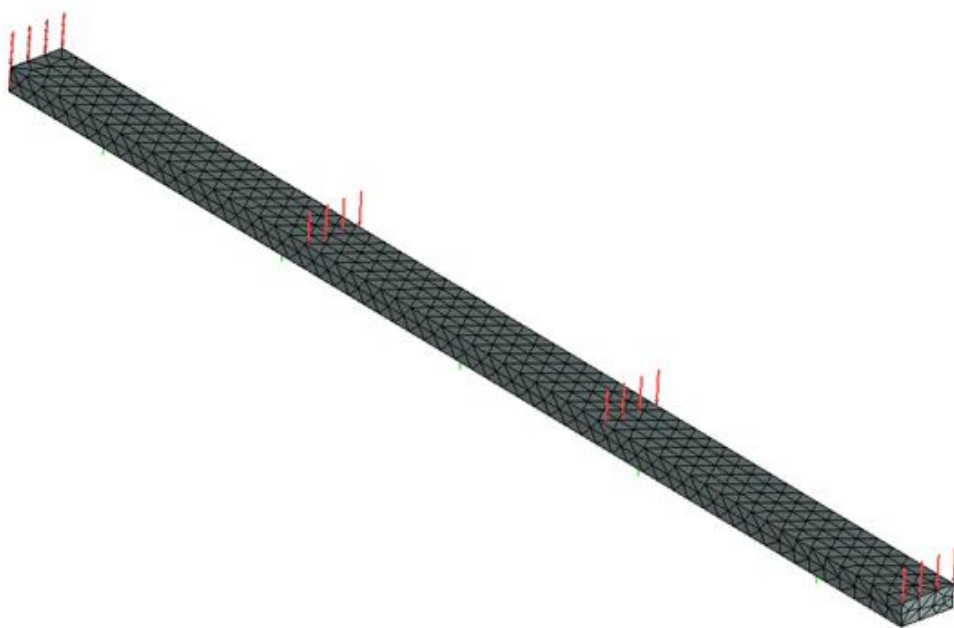


Рисунок 1.10-1 - Конечно-элементная модель при указанных нагрузке и закреплении.

Аналитическое решение ищется по формуле:

$$w_0^{\max} = (2\beta \cdot P - q_L) / k \cdot b,$$

Где  $J = bh^3 / 12$  – момент инерции,  $k$  – модуль реакции подстилающего слоя ( $k = 3e+06$  Н/м<sup>3</sup>),

$\beta = (k \cdot b / 4E \cdot J)^{1/4} = 1.52136$ . Краевой эффект прослеживается до расстояния  $L_{\text{кэ}} \approx \pi / \beta = 1.381$  м от левого конца балки.

Таким образом,  $w_0^{\max} = (2 \cdot 1.52136 \cdot 1000 - 200) / (3 \cdot 10^6 \cdot 0.05) = 18.95147$  мм.

Просадка балки:  $-q_L / k \cdot b = -1,333$  мм.

Перед численным расчетом определим следующие величины: площадь грани, по которой распределена нагрузка  $q_L$ :  $S = bL = 0.25$  м<sup>2</sup>; давление на эту плоскую грань:  $q = q_L \cdot L / S = 4000$  Па.

Вводимое значение суммарной жесткости, приложенной на нижнюю грань:  $k_1=k*S=3*10^6*0.25=750000$  Н/м.

После вычислений с помощью T-FLEX получаем следующие результаты:

Таблица 1.Параметры конечно-элементной сетки

Тип конечного элемента	Число вершин	Введено аргументов	Число конечных элементов
квадратичные тетраэдры (4 узла)	10100	30300	4821

Таблица 2. Результат "Перемещение"

Численное решение $w^*$ , мм	Аналитическое решение $w$ , мм	Ошибка $\delta = 100\% *  w^* - w  /  w $
18.9523	18.9515	0.004

Задача: "Балка на упругом основании "  
Перемещения в напр.Z, мм  
Масштаб перемещений: 15.83

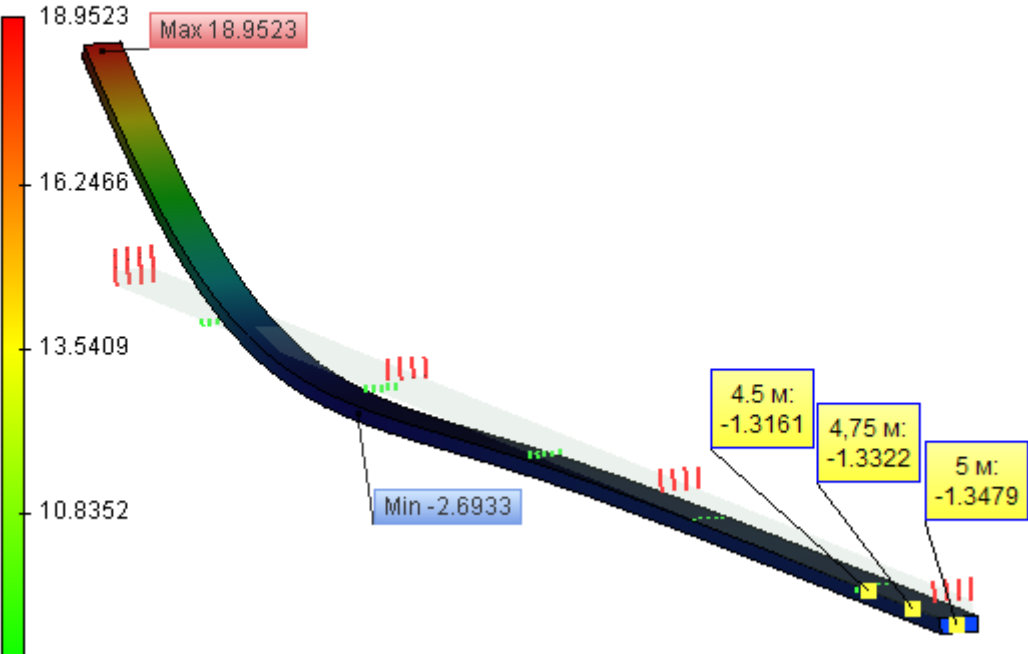


Рисунок 1.10-2 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (перемещения по Z)

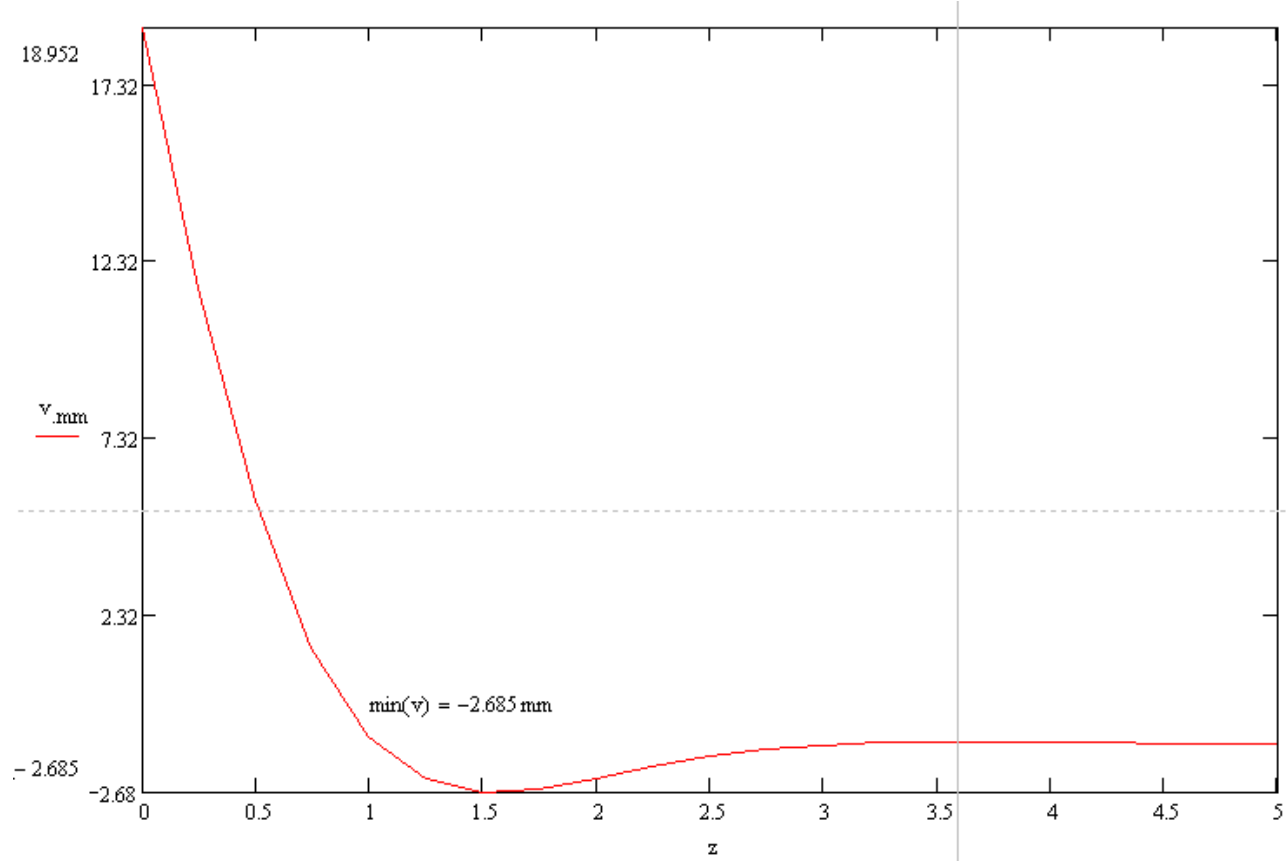


Рисунок 1.10-3 – График прогиба полубесконечной балки (аналитическое решение)

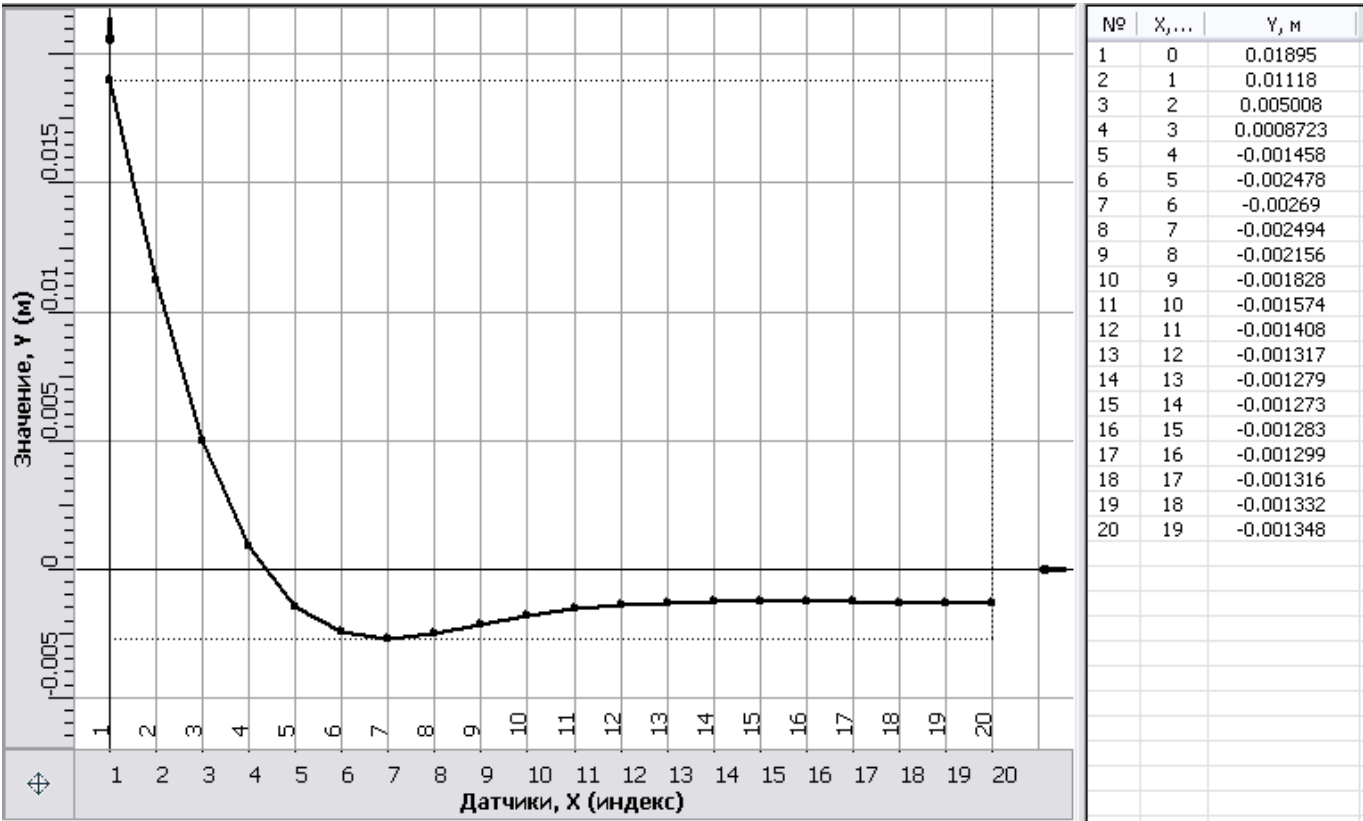


Рисунок 1.10-4 – График прогиба полубесконечной балки (численное решение)

**Вывод:**

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила 1,3% для квадратичного КЭ.

**Большая деформация круглой пластины**

Рассмотрим круглую пластину радиуса  $a$  и толщины  $h$ . Пластина закреплена и находится под воздействием распределенной нагрузки  $q$ .

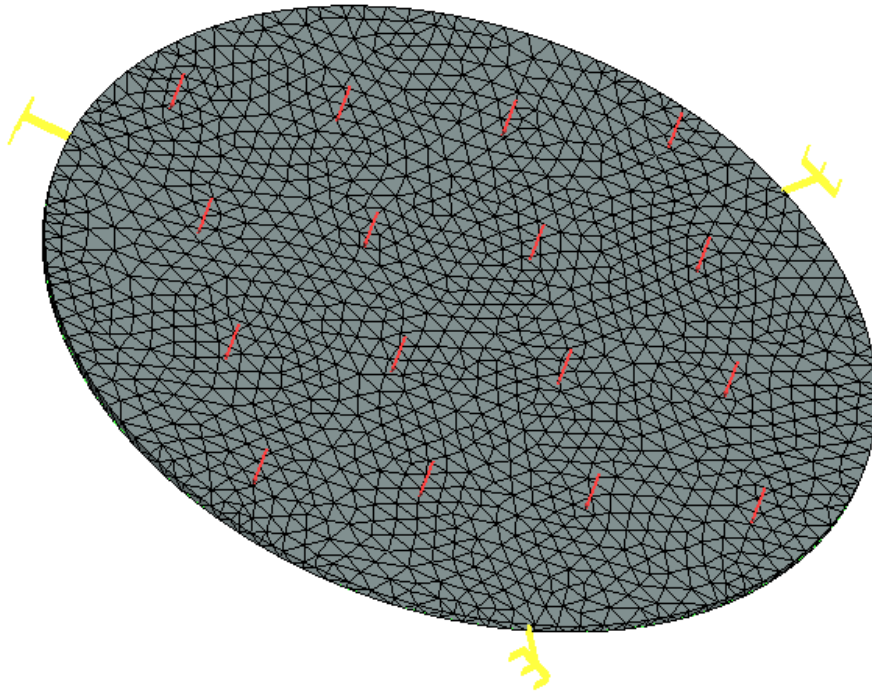


Рисунок 1.11-1 - Конечно-элементная модель при указанных нагрузке и закреплении.

Примем следующие входные данные: радиус пластины  $a$  равен 0.25 м, толщина пластины  $h$  равна 0.005 м, интенсивность нагрузки  $q$  равна  $1E+011$  Па. Свойства материала(сталь):  $E=2.1E+05$  и  $\nu=0.28$ .

Используем следующую аппроксимирующую формулу для расчета смещения в центре пластины:

$$w_0 = \frac{qa^4}{64D} \cdot \frac{1}{1 + 0.488 \frac{w_0^2}{h^2}},$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

жесткость на изгиб пластины.

Решая уравнение для  $w_0$ , мы получим значение максимального отклонения, которое должно находится в центре пластины:  $w_0 = 2.3258E-003$  м.

После вычислений с помощью T-FLEX получаем следующие результаты:

Таблица 1.Параметры конечно-элементной сетки

Тип конечного элемента	Число вершин	Число аргументов	Число конечных элементов
квадратичные тетраэдры	2561	42624	7421

Таблица 2. Результат "Перемещение"

Численное решение $w_0^*$ , м	Аналитическое решение $w_0$ , м	Ошибка $\delta = 100\% *  w_0^* - w_0  /  w_0 $
2.2926E-003	2.3258E-003	1.3

Задача: "Задача\_0"  
Перемещения, модуль, м  
Коэффициент нагрузки: 1.00  
Масштаб перемещений: 10.90

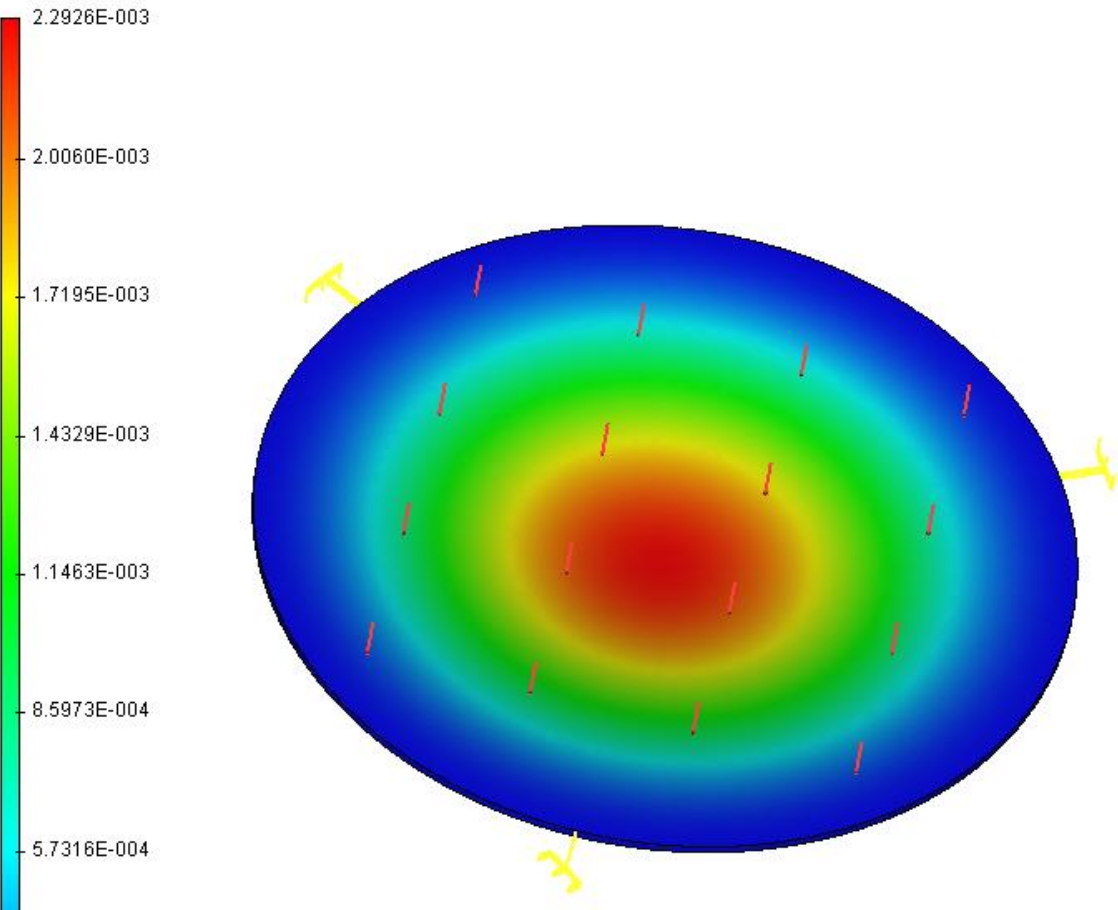


Рисунок 1.11-2 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (перемещения)

Вывод:

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила 1,3% для квадратичного КЭ.

### Защемленная квадратная пластина под распределенной нагрузкой

Рассмотрим защемленную квадратную пластину под давлением. В силу симметричности будем рассматривать только четверть пластины (ограничим перемещение по осям, перпендикулярным боковым граням).

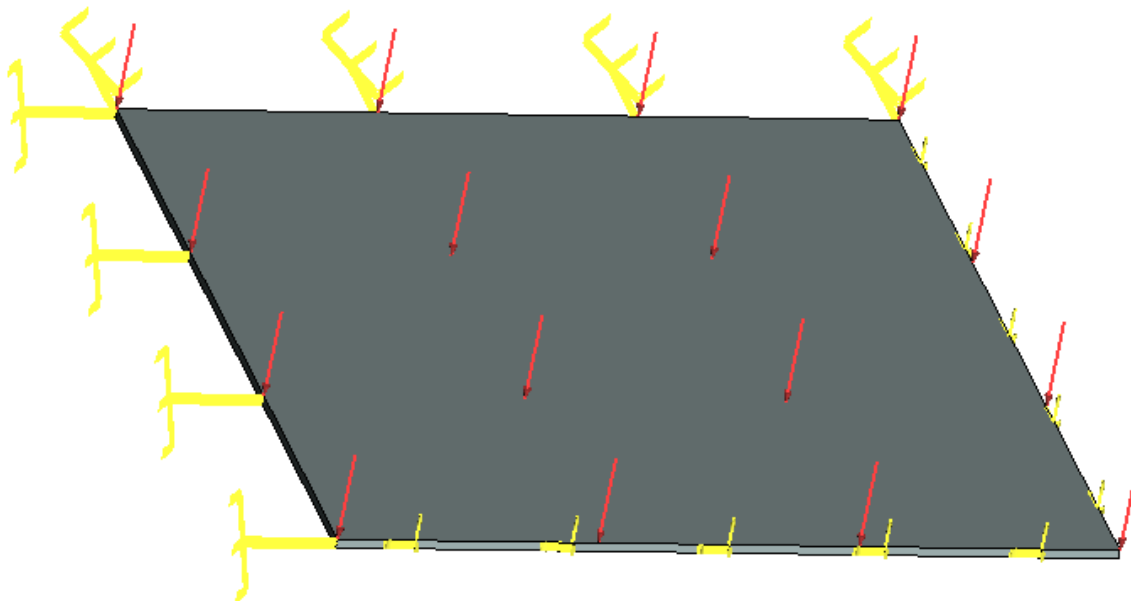


Рисунок 1.12-1 – Расчетная модель с нагрузками и закреплениями

Конечно-элементная модель с примененными давлением и закреплениями

Аналитическое решение для нахождения перемещения в центре пластины находится по формуле:

$$w_{\max} = 0.00126 \frac{qa^4}{D}, D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Примем следующие входные данные: длина и ширина пластины  $a = 500$  мм (на примере мы берем длину стороны равную 250 мм, т.к. рассматривается только четверть исходной пластины), толщина пластины  $h = 3$  мм, приложенное давление  $q = 800$  Па. Свойства материала (сталь):  $E = 2.1E+011$  Па,  $\nu = 0.28$ . Аналитическое решение может быть выражено как:  $w = 1.2288E-004$  м.

После вычислений с помощью T-FLEX получаем следующие результаты:

**Таблица 1. Параметры конечно-элементной сетки**



Тип конечного элемента	Число вершин	Число аргументов	Число конечных элементов
квадратичные тетраэдры	1905	32115	5425

Таблица 2. Результат "Перемещение"

Численное решение $w^*, m$	Аналитическое решение $w, m$	Ошибка $\delta = 100\% *  w_0^* - w_0  /  w_0 $
1.2274E-004	1.2288E-004	0.15

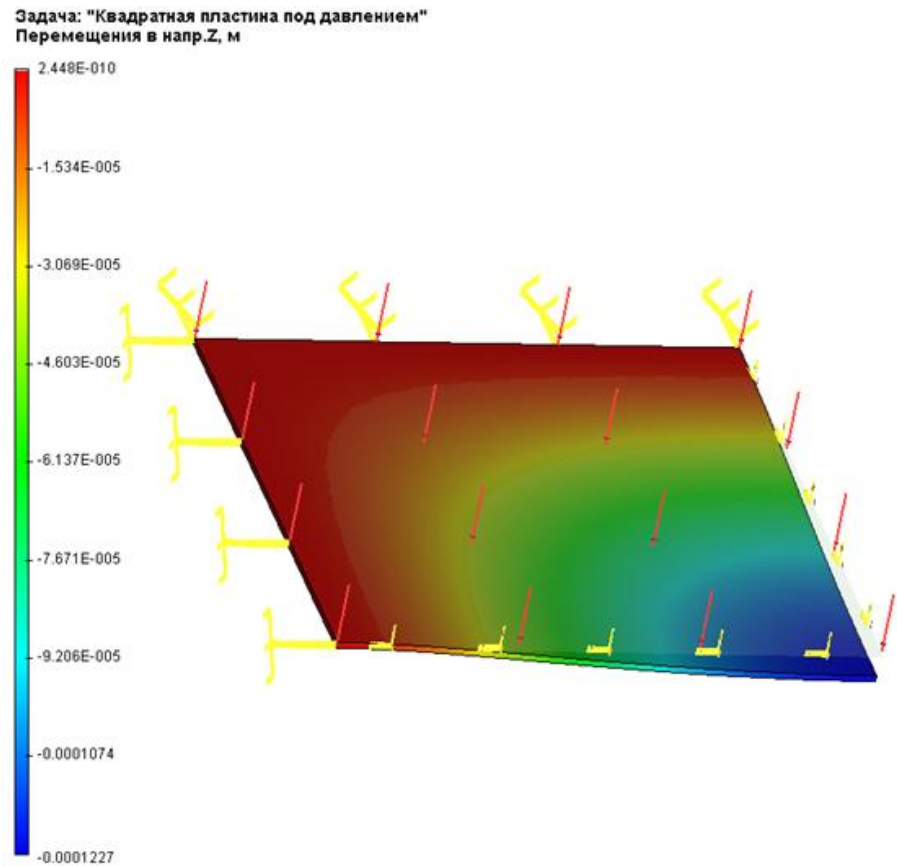


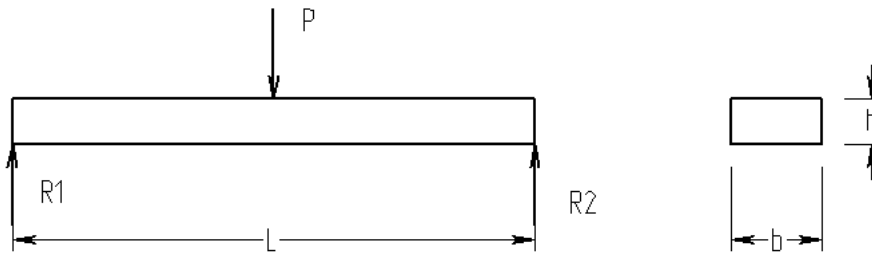
Рисунок 1.12-2 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (перемещения по Z)

**Вывод:**

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила 0,15% по перемещениям для квадратичного КЭ.

### Изгиб балки под действием 3 сил

Рассмотрим балку длины  $L$ , нагруженную силой  $P$  в середине силами реакции  $R_1$ ,  $R_2$  на концах. В поперечном сечении балка прямоугольная шириной  $b$  и высотой  $h$ .



Искомая величина – максимальное смещение балки.

Примем:  $P = 1000$  Н,  $R_1=500$  Н,  $R_2=500$  Н,  $L = 0.5$  м,  $b = 0.05$  м,  $h = 0.02$  м.  
Характеристики материала (сталь):  $E = 2.1E+011$  Па,  $\nu = 0.28$ .  
Оба конца балки незакреплены и находятся под действием нагрузок  $R_1$ ,  $R_2$ , направленных вертикально. Сила  $P$  приложена к середине балки.  
Расчеты проведены с включенной опцией «Стабилизировать систему» с добавочной жесткостью 1.



Рисунок 1.13-1 Расчетная модель с нагрузками и закреплениями

Конечно-элементная модель при указанных нагрузке и закреплении.

Аналитическое решение выглядит так:

$w = (P \cdot L^3) / (48 \cdot E \cdot J) = 3.720E-004 \text{ м}$

где P – сила, L – длина балки, E – модуль Юнга для материала,  $J = b \cdot h^3 / 12$  – момент инерции.

После вычислений с помощью T-FLEX получаем следующие результаты:

(перемещение равно (2.2283E-004)-(-1.5386E-004)=3.7669E-004 м)

Таблица 1.Параметры конечно-элементной сетки

Тип конечного элемента	Число вершин	Число аргументов	Число конечных элементов
квадратичные тетраэдры	2033	40626	8622

Таблица 2. Результат "Перемещение"

Численное решение, <i>m</i>	Аналитическое решение , <i>m</i>	Ошибка $\delta = 100\% *  0Z^* - 0Z  /  0Z $
-----------------------------	----------------------------------	--

3.767E-004	3.720E-004	1.26
------------	------------	------

Задача: "Задача\_0"  
Перемещения в напр. Z, м  
Масштаб перемещений: 0.00

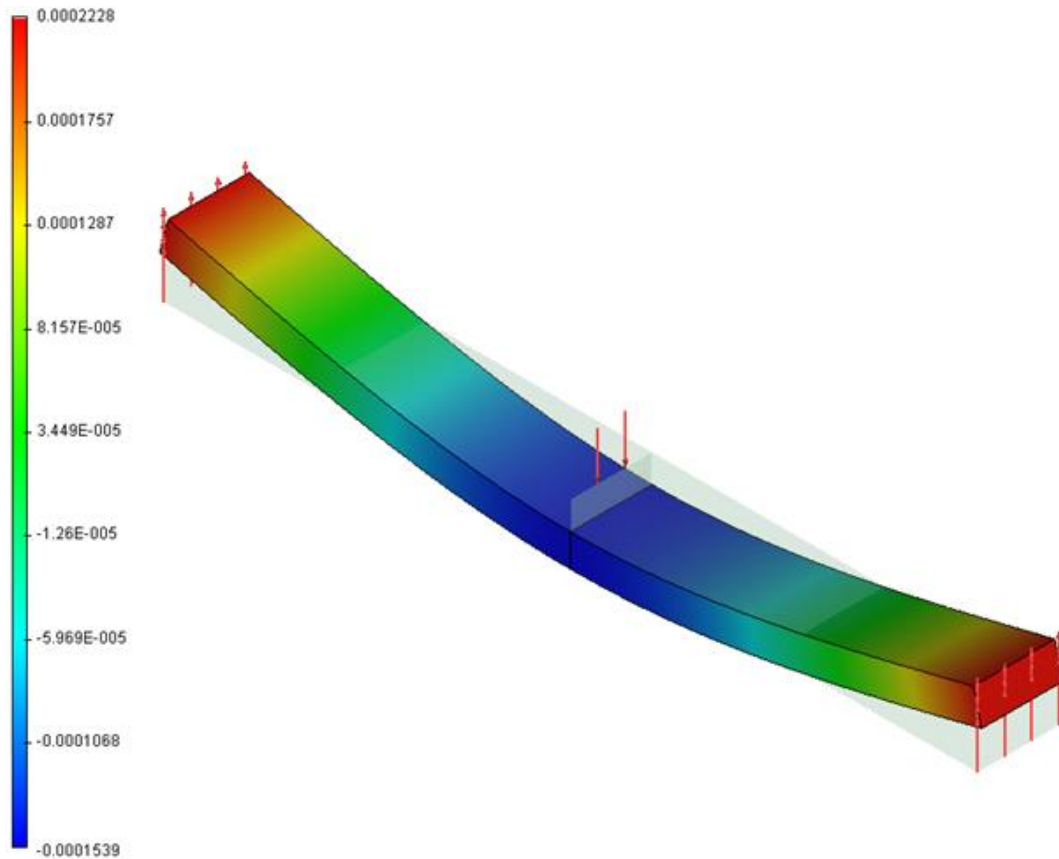


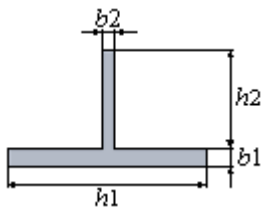
Рисунок 1.13-2 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (перемещения по Z)

#### Вывод:

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила 1,3% по перемещениям для квадратичного КЭ.

### Сгибание Т-образной балки

Рассмотрим Т-образную балку.



Длина балки равна  $L$ . Балка жестко закреплена слева, а к правому концу приложена сила  $P$ .

Рассмотрим расчет при следующих входных данных: длина L балки 1 м, длины сторон b1,h1,b2,h2 - 0.01м, 0.1м, 0.006 м, 0.05 м, соответственно, сила P равна 100 Н. Характеристики материала(сталь): E = 2.1E+011 Па, ν = 0.28.



Рисунок 1.14-1 - Расчетная модель с нагрузками и закреплениями

Конечно-элементная модель при указанных нагрузке и закреплении.

Аналитическое решение задачи ищется с помощью следующего уравнения:

$$w = \frac{PL^3}{3EJ}$$

где

$J_y = (J_{y1} + A_1 z_{01}^2) + (J_{y2} + A_2 z_{02}^2)$  - момент инерции относительно центральной оси инерции;

$$J_{y1} = \frac{h_1 b_1^3}{12},$$

$$A_1 = b_1 \cdot h_1,$$

$$J_{y2} = \frac{b_2 h_2^3}{12};$$

$$A_2 = b_2 \cdot h_2;$$

$z_{01}, z_{02}$  – расстояния между осями  $Y_1$  и  $Y$ ,  $Y_2$  и  $Y$ , соответственно.

Таким образом,  $w = 5.6989E-004$  м.

После вычислений с помощью T-FLEX получаем следующие результаты:

Таблица 1.Параметры конечно-элементной сетки

Тип конечного элемента	Число вершин	Число аргументов	Число конечных элементов
квадратичные тетраэдры	2861	49053	7905

Таблица 2. Результат "Перемещение"

Численное решение $w_z^*, m$	Аналитическое решение $w, m$	Ошибка $\delta = 100\% *  w_z^* - w  /  w $
------------------------------	------------------------------	---

5.7335E-004	5.6989E-004	0.62
-------------	-------------	------

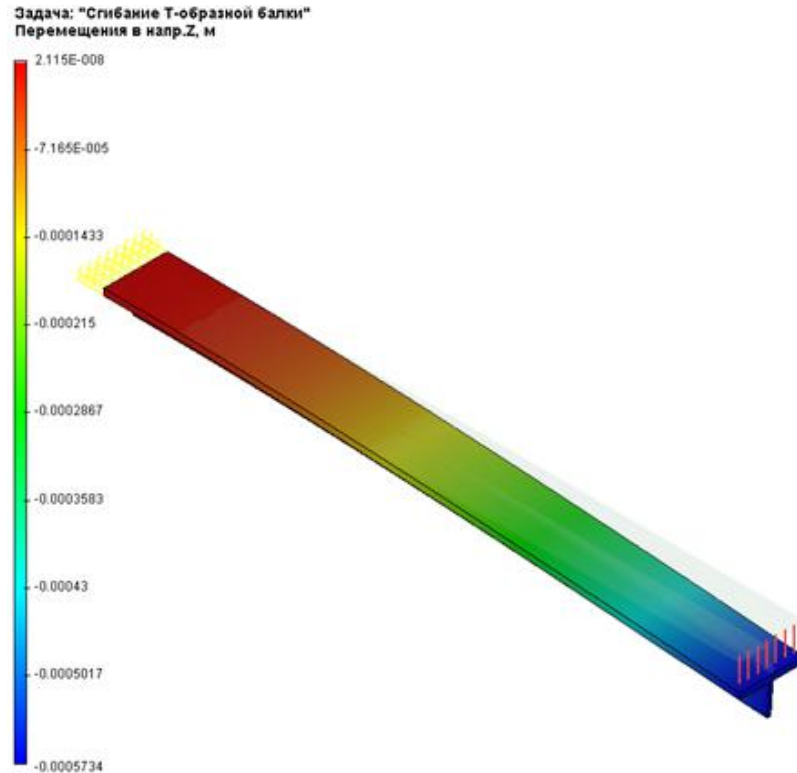


Рисунок 1.14-2 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (перемещения по Z)

#### Вывод:

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила 0,62% по перемещениям для квадратичного КЭ.

#### Кручение балки с квадратным поперечным сечением

Рассмотрим балку с квадратным поперечным сечением. Длина стороны квадрата  $a$ . Длина балки  $L$ .

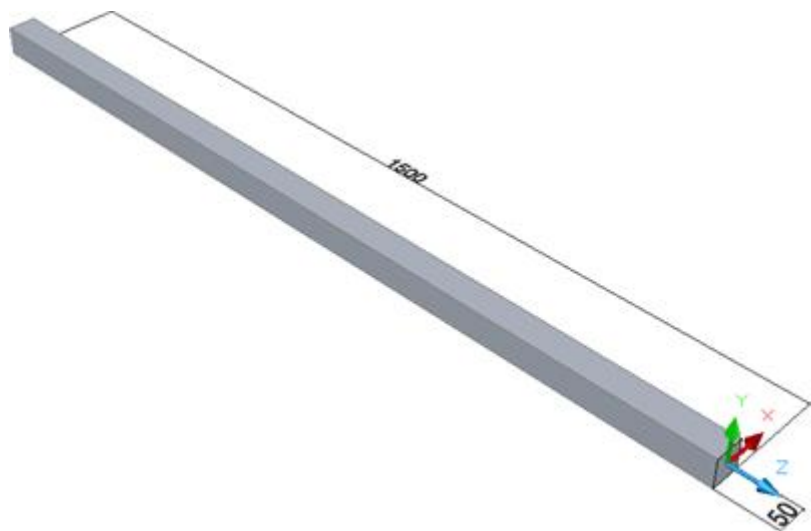


Рисунок 1.15-1 – Балка с размерами

Балка подвергается перпендикулярно направленному и приложенному к правой грани кручению  $M_t$ , левый конец балки жестко закреплён.



Рисунок 1.15-2 - Конечно-элементная модель при указанных нагрузке и закреплении.

Примем следующие входные данные: длина  $L$  балки 1.5 м, длина стороны квадрата  $a$  0.050 м, величина приложенного вращения  $M_t$  1000 Н-м. Характеристики материала (сталь AISI 1020):  $E = 2.0E+011$  Па,  $\nu = 0.29$ . Чтобы найти угол поворота, используем следующее отношение:

$$\varphi = \frac{M_t L}{GJ_p},$$

где  $G=E/2(1+\nu)$  – модуль сдвига,  $J_p=\beta a^4$  – полярный момент инерции квадратного сечения,  $\beta=0.1406$ .

Таким образом,  $\varphi=2.2168\text{E-}002$  рад.  
Максимальное смещение вычисляется по формуле:

$$\Delta u = \sin(\varphi) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

Таким образом,  $\Delta u = 7.8371\text{E-}004$  м.  
Максимальный модуль сдвига  $\tau_{\max}$  считается по следующей формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha \cdot a^3}$$

где  $\alpha=0.208$

Таким образом,  $\tau_{\max} = 3.8462\text{E+}007$  Па.

После вычислений с помощью T-FLEX получаем следующие результаты:

**Таблица 1.Параметры конечно-элементной сетки**

Тип конечного элемента	Число вершин	Число аргументов	Число конечных элементов
квадратичные тетраэдры	4608	91878	19876

**Таблица 2. Результат "Перемещение"**

Численное решение $\Delta u^*$ , м	Аналитическое решение $\Delta u$ , м	Ошибка $\delta = 100\% *   \Delta u^* - \Delta u   /   \Delta u  $
7.7079E-004	7.8371E-004	1.65

**Таблица 3. Результат "Напряжение сдвига"**

Численное решение $\tau_{\max}^*$ , Па	Аналитическое решение $\tau_{\max}$ , Па	Ошибка $\delta = 100\% *   \tau_{\max}^* - \tau_{\max}   /   \tau_{\max}  $
4.0591E+007	3.8462E+007	5.5



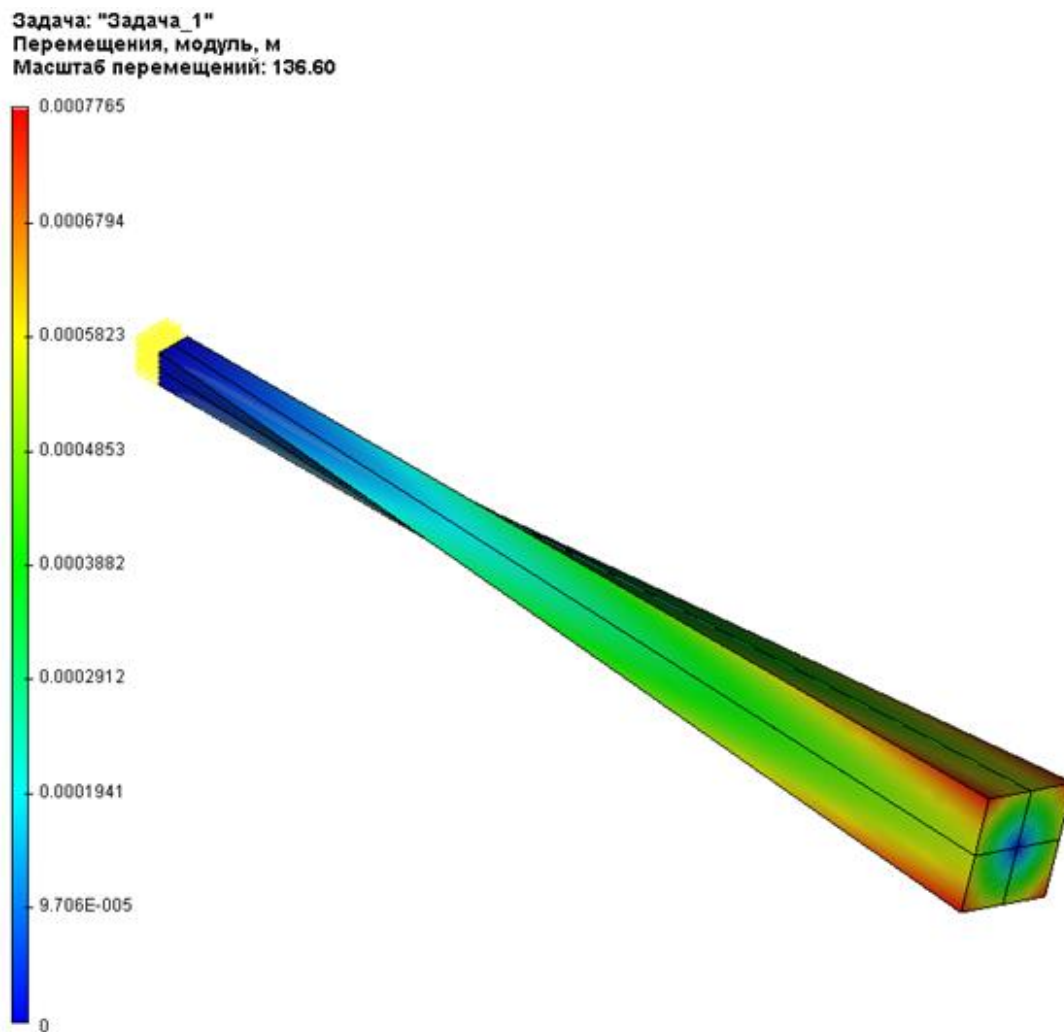


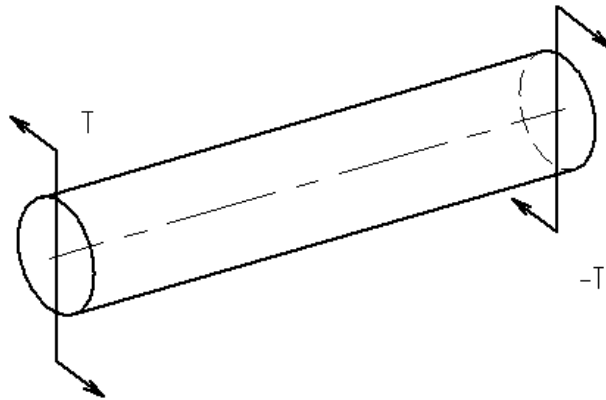
Рисунок 1.15-3 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (перемещения)

**Вывод:**

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила 1,65% по перемещениям и 5,5% по напряжениям для квадратичного КЭ.

**Кручение вала двумя вращающимися моментами**

Рассмотрим вал длиной  $L$ , диаметром  $d$ , нагруженный двумя вращающимися моментами  $T$ , перпендикулярно направленными друг ко другу и приложенными к противоположным концам вала.



Искомая величина – максимальный угол отклонения.  
 Примем  $T = 100$  Н\*м,  $L = 0.5$  м,  $d = 0.06$  м.  
 Характеристики материала (сталь):  $G = 8.203E+010$  Па,  $\nu = 0.28$ .  
 Оба конца вала не закреплены и находятся под действием моментов  $T$ , ось вращений которых совпадает с осью цилиндра, а направления противоположны.  
 Расчеты проведены с включенной опцией «Стабилизировать систему» с добавочной жесткостью 1.

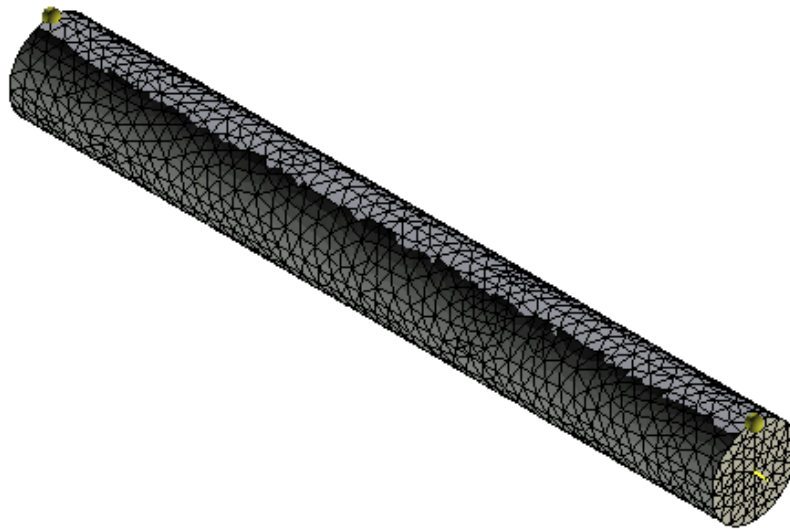


Рисунок 1.16-1 - Конечно-элементная модель при указанных нагрузке и закреплении.

Аналитическое решение выглядит так:  
 $\varphi = (T \cdot L) / (G \cdot J_p) = 4.791E-004$  рад  
 $w = d \cdot \sin(\varphi/2) = 1.4372E-005$  м

Где  $\varphi$  – угол вращения,  $w$  – смещение точки,  $T$  – вращающий момент,  $L$  – длина вала,  $G$  – модуль сдвига для материала,

$J_p = \pi d^4 / 32$  – полярный момент инерции кругового поперечного сечения.

После вычислений с помощью T-FLEX получаем следующие результаты:

перемещение равно  $7.124\text{E-}006 + 7.174\text{E-}006 = 1.429\text{E-}005 \text{ м}$

Таблица 1.Параметры конечно-элементной сетки

Тип конечного элемента	Число вершин	Число аргументов	Число конечных элементов
квадратичные тетраэдры	3268	69363	15348

Таблица 2. Результат "Перемещение"

Численное решение $w^*, \text{м}$	Аналитическое решение $w, \text{м}$	Ошибка $\delta = 100\% *  w^* - w  /  w $
1.4298E-005	1.4372E-005	0.513

Задача: "Задача\_1"  
Перемещения, модуль, м  
Масштаб перемещений: 0.00

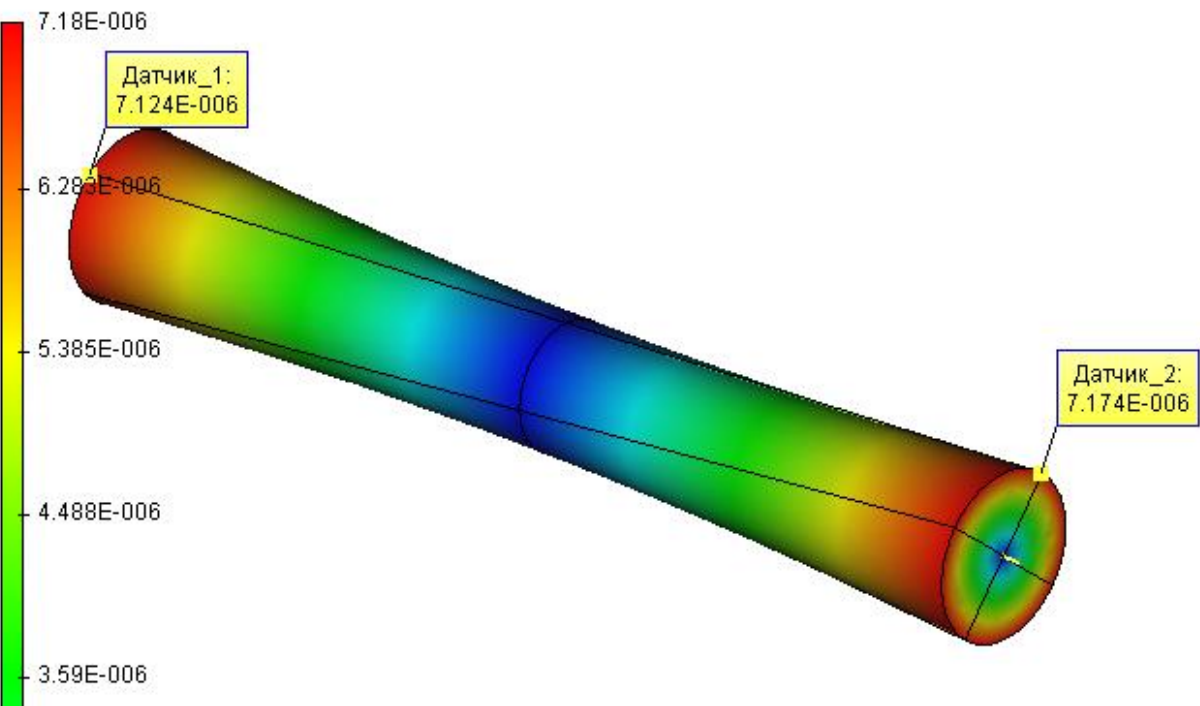


Рисунок 1.16-2 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (перемещения)

**Вывод:**

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила 0,5% по перемещениям для квадратичного КЭ. На графике зависимости относительной погрешности от числа КЭ видно, что влияние стабилизации изменяет характер кривой.

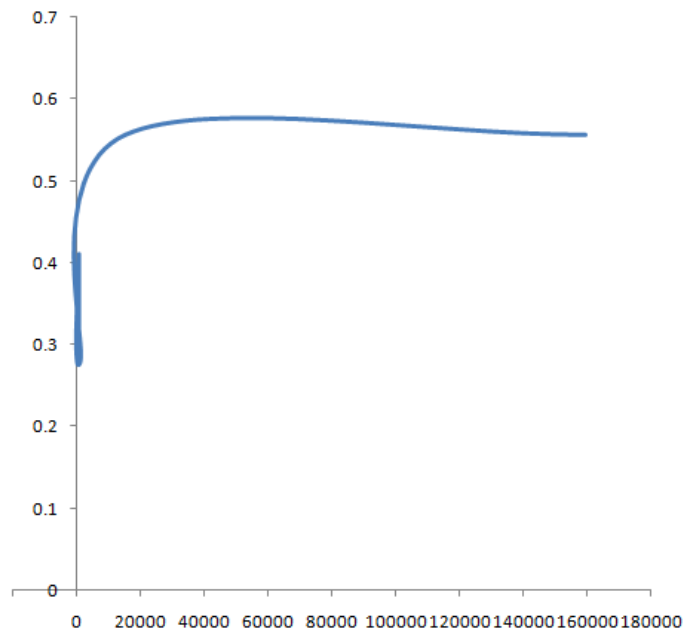


Рисунок 1.16-3 – Зависимость относительной погрешности от числа КЭ

### Прогиб свободно опертой балки под равномерно распределенной нагрузкой

Рассмотрим балку под равномерно распределенной нагрузкой  $q$ . Длина балки равна  $L$ . В поперечном сечении балка образует квадрат. Длина стороны квадрата равна  $a$ .

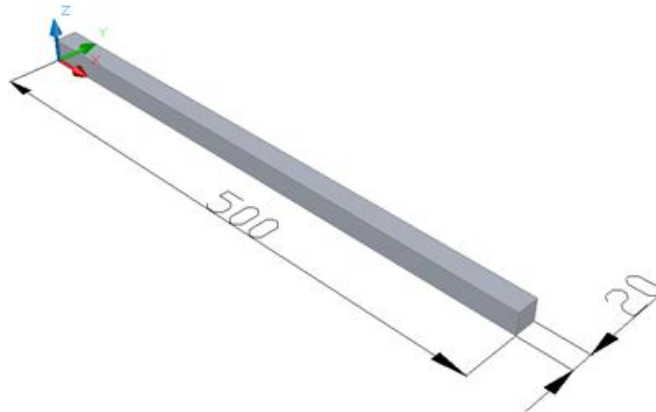


Рисунок 1.17-1 – Балка с размерами

Искомой величиной является максимальное перемещение по  $Z$ -координате. Примем следующие входные данные:  $q = 3000$  Па,  $L = 0.5$  м,  $a = 0.02$  м. Характеристики материала(сталь): модуль Юнга  $E = 2.1E+011$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.28$ .



Рисунок 1.17-2 - Конечно-элементная модель с указанными нагрузкой и закреплениями

Аналитическое решение вычисляется по формуле:  
$$w = \frac{q \cdot a}{24 EJ} \left( -x^4 + 2 L x^3 - L^3 x \right), x \in [0, L]$$

Примем максимальное отклонение балки за  $x = L / 2$  :

$$w_{\frac{L}{2}} = -\frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot a \cdot L^4}{E \cdot J},$$

где  $J = a^4 / 12$  – момент инерции.

Таким образом,  $| w | = 1.7439E-005$  м.

После вычислений с помощью T-FLEX получаем следующие результаты:

Таблица 1.Параметры конечно-элементной сетки

Тип конечного элемента	Число вершин	Число аргументов	Число конечных элементов
квадратичные тетраэдры	695	12003	2169

Таблица 2. Результат "Перемещение"

Численное решение $  w^*  ,$ $m$	Аналитическое решение $  w  ,$ $m$	Ошибка $\delta = 100\% \cdot   w^* - w   /   w  $
1.752E-005	1.7439E-005	0.4

Задача: "Прогиб балки"  
Перемещения в напр. Z, м  
Масштаб перемещений: 1427.65

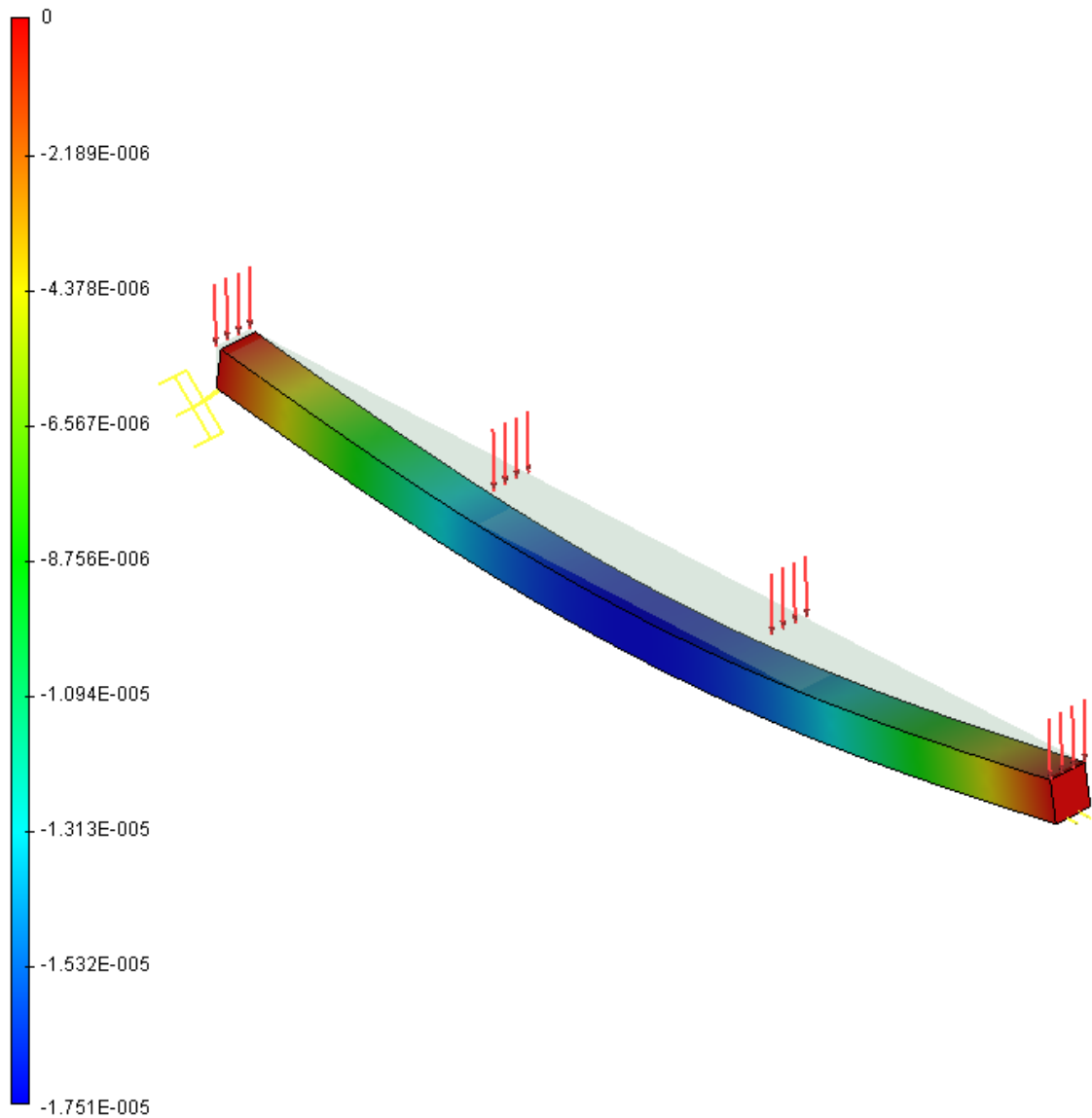
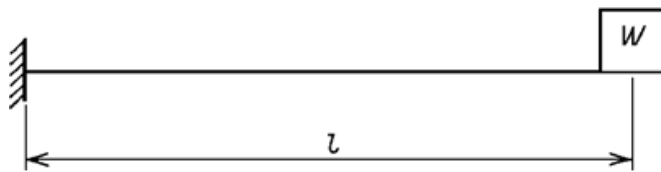


Рисунок 1.17-3 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (перемещения по Z)

\* Результаты численного решения зависят от конфигурации сетки и могут немного отличаться от представленных в таблице.

## Прогиб балки с грузом

Рассмотрим консольную балку, правый конец которой нагружен весом.



Длина балки  $L$ . В сечении балка образует прямоугольник ширины  $b$  и высоты  $h$ . Масса груза  $M$ .  
 Масса балки  $m$ .  
 $m = \rho F L$ , где  $F = b h$ , - размеры сечения,  $\rho$  - плотность материала балки.

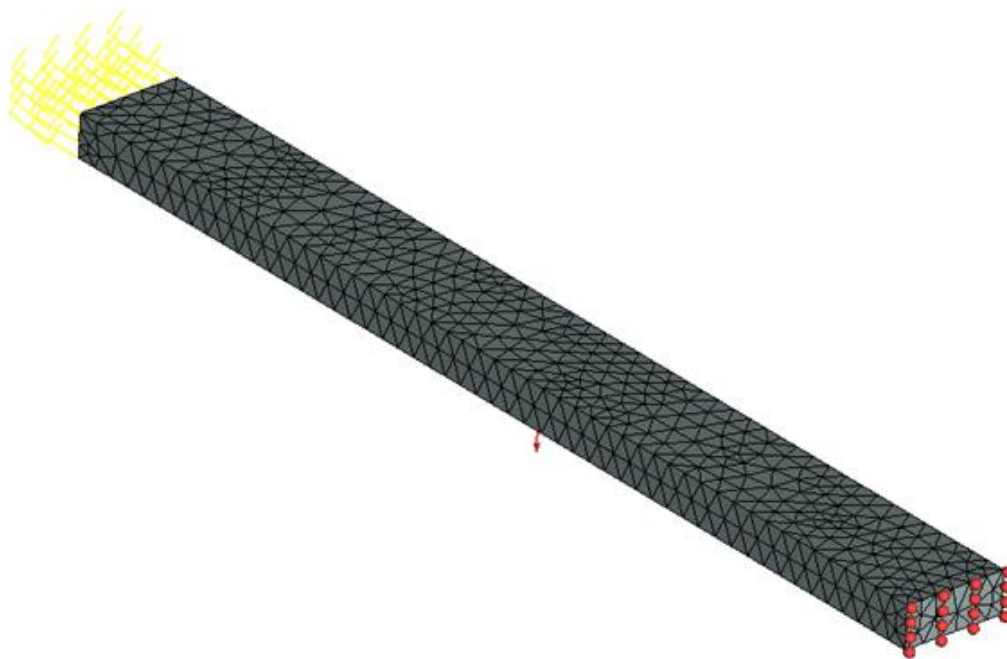


Рисунок 1.18-1 - Конечно-элементная модель при указанных нагрузке и закреплении.

Пусть  $L$  равно 0.5 м,  $b$  равно 0.02 м,  $h$  равно 0.05 м.  
 Свойства материала:  $E = 2.1E+011$  Па,  $\nu=0.28$ ,  $\rho = 7800$  кг / м<sup>3</sup>.  
 Масса груза  $M$  равна 20мЛ кг (т.е. 78 кг).  
 Аналитическое решение задачи получим из этой формулы:  

$$|z|_{\max} = \frac{gL^3}{3EJ} \left( M + \frac{33}{140} mL \right), \quad J = \frac{hb^3}{12}$$

Таким образом,  $|z|_{\max} = 4.6067E-003$  м.

После вычислений с помощью T-FLEX получаем следующие результаты:

Таблица 1.Параметры конечно-элементной сетки

Тип конечного элемента	Число вершин	Число аргументов	Число конечных элементов
квадратичные тетраэдры	2060	40992	8766

Таблица 2. Результат "Перемещение"

Численное решение $ z _{\max}^*$ , м	Аналитическое решение $ z _{\max}$ , м	Ошибка $\delta = 100\% *    z _{\max}^* -  z _{\max}   /  z _{\max}$
4.6128E-003	4.6067E-003	0.13

Перемещения в напр.Z, м  
Масштаб перемещений: 5.42

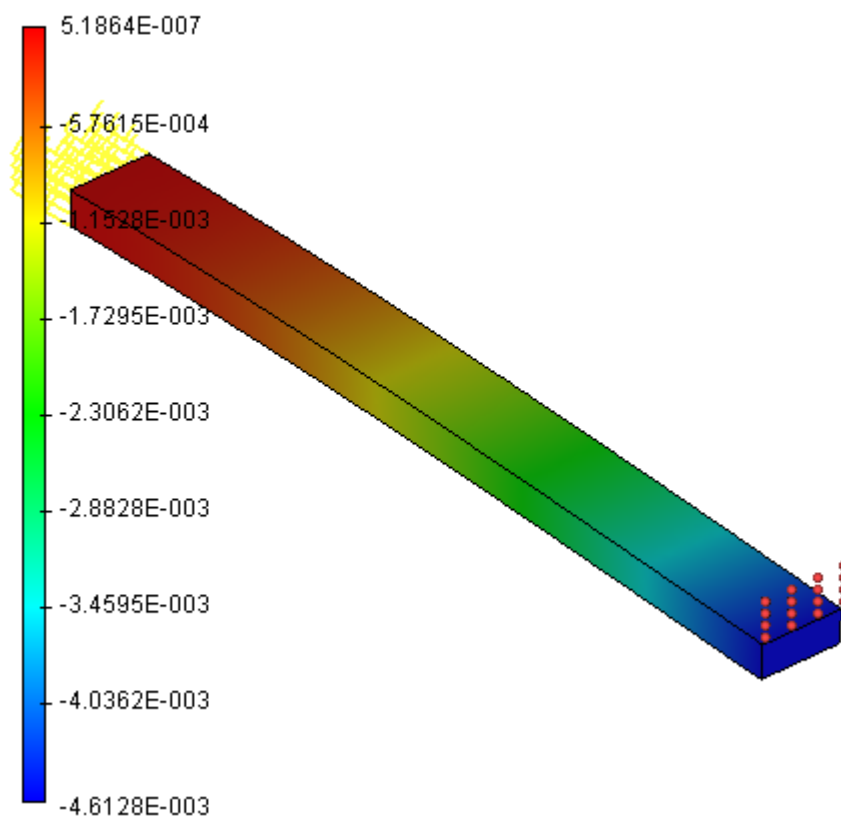


Рисунок 1.18-2 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (перемещения по Z)

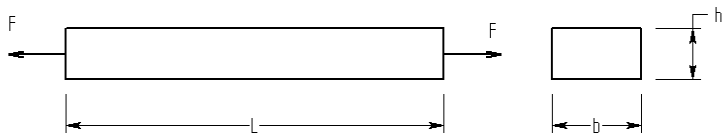
**Вывод:**

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила 0,13% по перемещениям для квадратичного КЭ.



## Растяжение балки под действием 2 сил

Рассмотрим балку длиной  $L$ , нагруженную двумя силами  $F$ , направленными по нормали от обоих ее концов. В поперечном сечении балка прямоугольная шириной  $b$  и высотой  $h$ .



Искомая величина — максимальное растяжение.  
 Примем  $F = 1000$  Н,  $L = 0.5$  м,  $b = 0.05$  м,  $h = 0.02$  м.  
 Характеристики материала (сталь):  $E = 2.1E+011$  Па,  $\nu = 0.28$ .  
 Оба конца балки не закреплены и находятся под действием сил  $F$ , направленных по нормали к граням.

Расчеты проведены с включенной опцией «Стабилизировать систему» с добавочной жесткостью 1.



**Рисунок 1.19-1 - Конечно-элементная модель при указанных нагрузке и закреплении.**

Аналитическое решение выглядит так:

$$w = (F \cdot L) / (A \cdot E) = 2.381E-006 \text{ м}$$

где  $P$  – сила,  $L$  – длина балки,  $E$  – модуль Юнга для материала,  $A = b \cdot h$  - площадь.

После вычислений с помощью T-FLEX получаем следующие результаты:

(перемещение равно  $(1.199E-006) + (1.182E-006) = 2.381E-006$  м)

Таблица 1.Параметры конечно-элементной сетки

Тип конечного элемента	Число вершин	Число аргументов	Число конечных элементов
квадратичные тетраэдры	2030	40821	8712

Таблица 2. Результат "Перемещение"

Численное решение $0Y^*$ , м	Аналитическое решение $0Y$ , м	ошибка $\delta = 100\% *  0Y^* - 0Y  /  0Y $
2.381E-004	2.381E-004	0.1

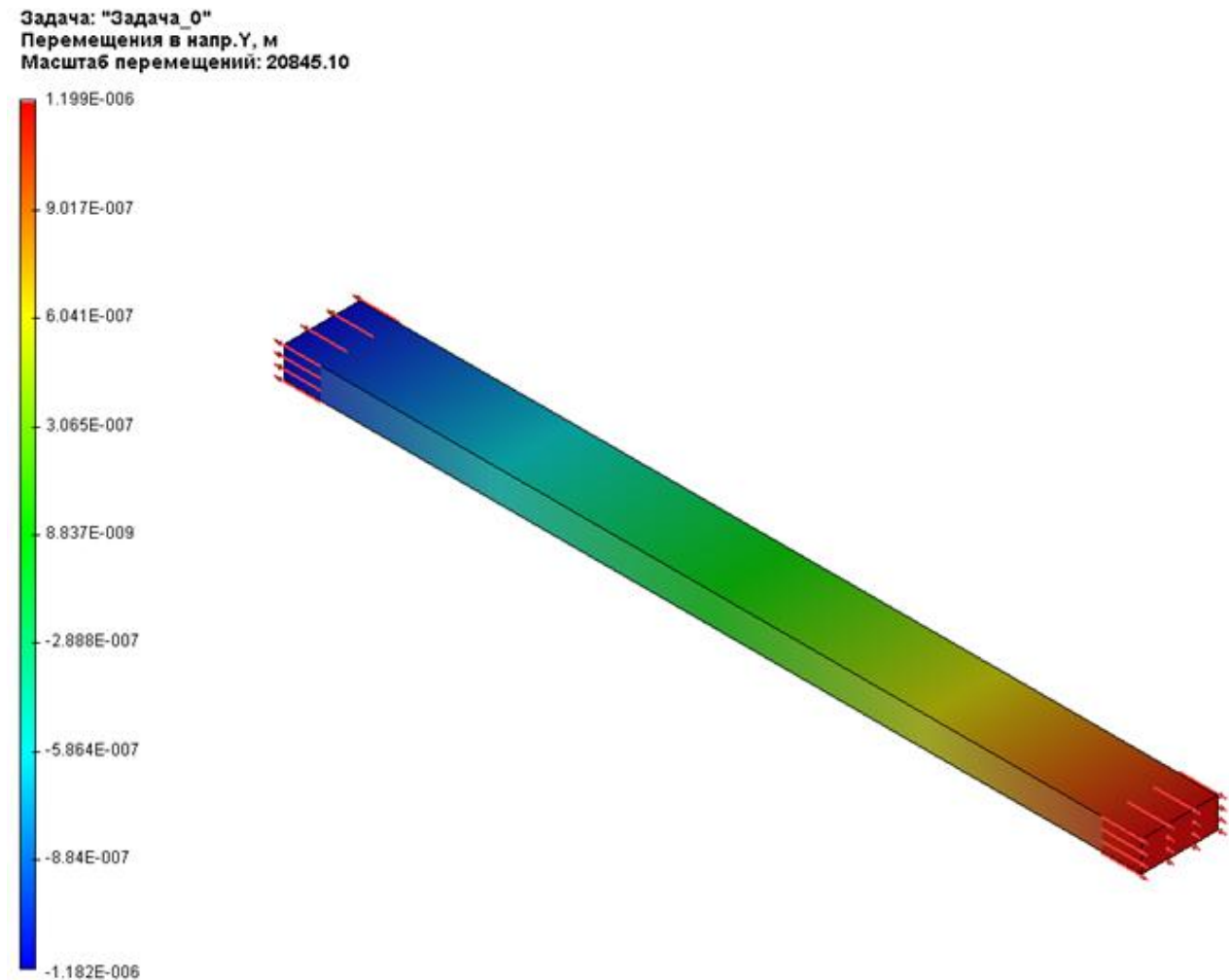


Рисунок 1.19-2 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (перемещения по Y)

**Вывод:**

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила 0,1% по перемещениям для квадратичного КЭ.

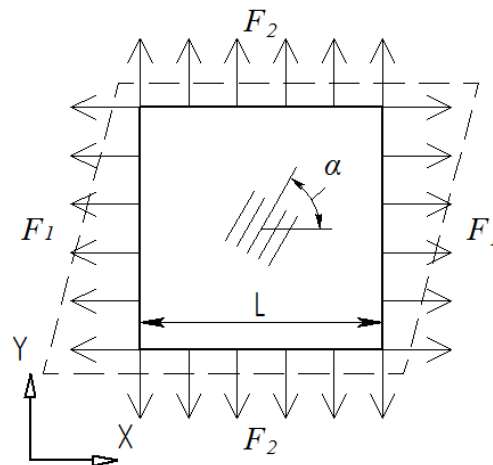
## Напряжения и деформации ортотропной пластины при двухосном растяжении

Рассмотрим квадратную пластину из ортотропного материала с длиной стороны  $L$ , которая нагружена силами  $F_1$ ,  $F_2$ , приложенным к краям пластины. Толщина пластины  $h$ .

Требуется определить напряжения и деформации пластины.

Примем  $F_1=20000$  Н,  $F_2=10000$  Н,  $L=0.1$  м,  $h=0.005$  м.

Построив модель, создадим задачу типа «Статический анализ» и разобьем модель на конечные элементы. Параметры материала следующие: Модули упругости  $E_1=5.59 \cdot 10^{10}$  Па,  $E_2=1.373 \cdot 10^{10}$  Па,  $E_3=1.373 \cdot 10^{10}$  Па, модули сдвига  $G_{12}=5.59 \cdot 10^9$  Па,  $G_{23}=4.904 \cdot 10^9$  Па,  $G_{31}=5.59 \cdot 10^9$  Па, коэффициенты Пуассона  $\nu_{12}=0.277$ ,  $\nu_{23}=0.4$ ,  $\nu_{31}=0.068$ . Угол наклона главной оси симметрии  $\alpha=45^\circ$ .



Расположим пластину так, чтобы главные оси ортотропной симметрии совпадали с осями глобальной системы координат.

На нижнюю грань приложим частичное закрепление с ограничением перемещения по оси  $Z$ . Для стабилизации модели приложим упругое основание на верхнюю грань пластины с дополнительной жесткостью 1 Н/м. На пару параллельных боковых граней приложим нормальную нагрузку величиной  $F_1$ , на другую пару приложим нормальную нагрузку величиной  $F_2$ .

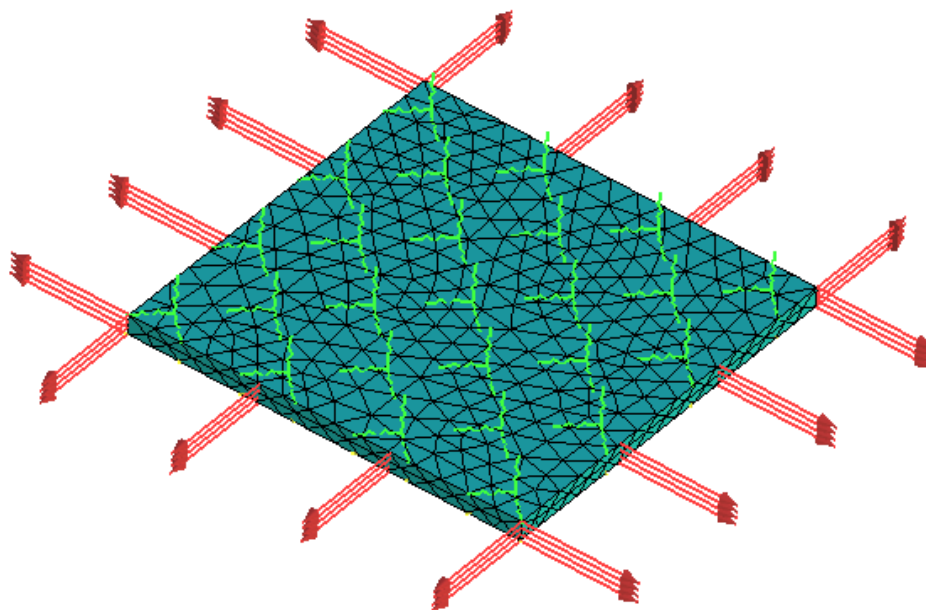


Рисунок 1.20-1 - Конечно-элементная модель ортотропной пластины с нагрузками и закреплениями

С помощью команды **«Расчет»** выполним статический расчет пластины. Получим результаты в виде деформаций и напряжений.

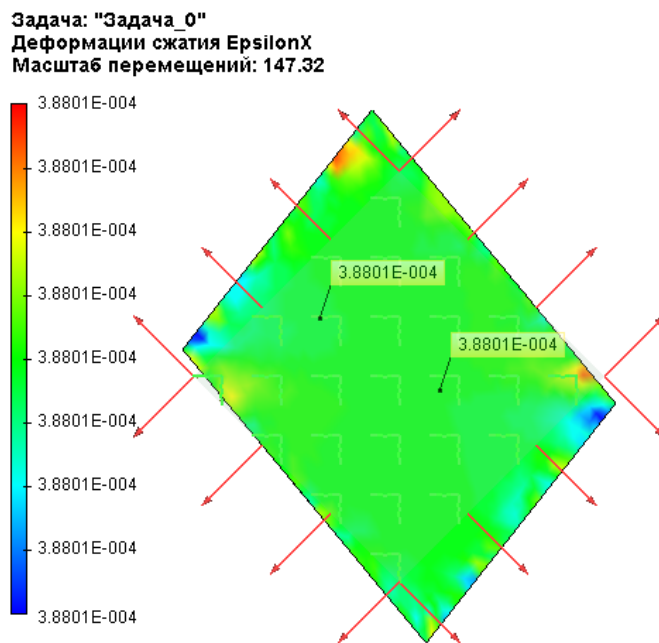


Рисунок 1.20-2 - Деформации OX ортотропной пластины

Задача: "Задача\_0"  
Деформации сжатия EpsilonY  
Масштаб перемещений: 147.32

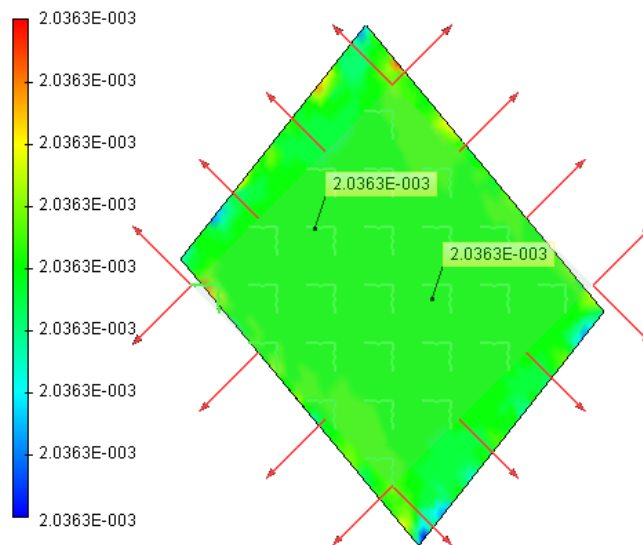


Рисунок 1.20-3 - Деформации ОУ ортотропной пластины

Задача: "Задача\_0"  
 Напряжения  $\sigma_x$ , Н/м<sup>2</sup>  
 Масштаб перемещений: 147.32

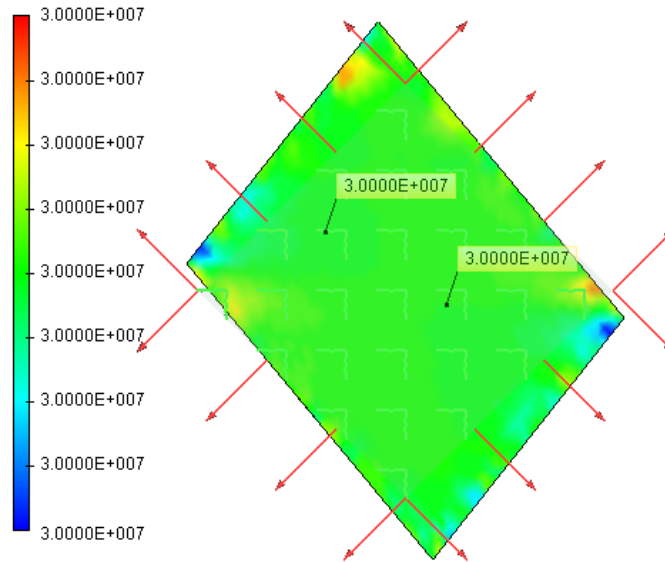


Рисунок 1.20-4 - Напряжения  $\sigma_x$  ортотропной пластины

Задача: "Задача\_0"  
 Напряжения  $\sigma_y$ , Н/м<sup>2</sup>  
 Масштаб перемещений: 147.32

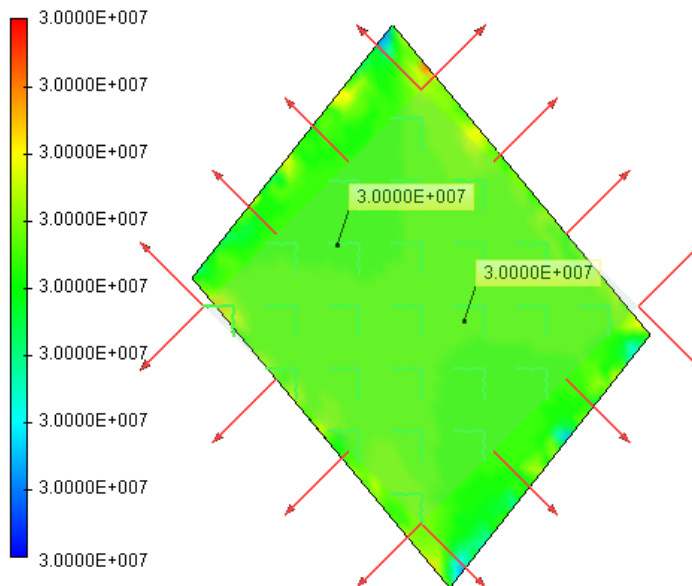


Рисунок 1.20-5 - Напряжения  $\sigma_y$  ортотропной пластины

Задача: "Задача\_0"

Главное нормальное напряжение 1, Н/м<sup>2</sup>

Масштаб перемещений: 147.32

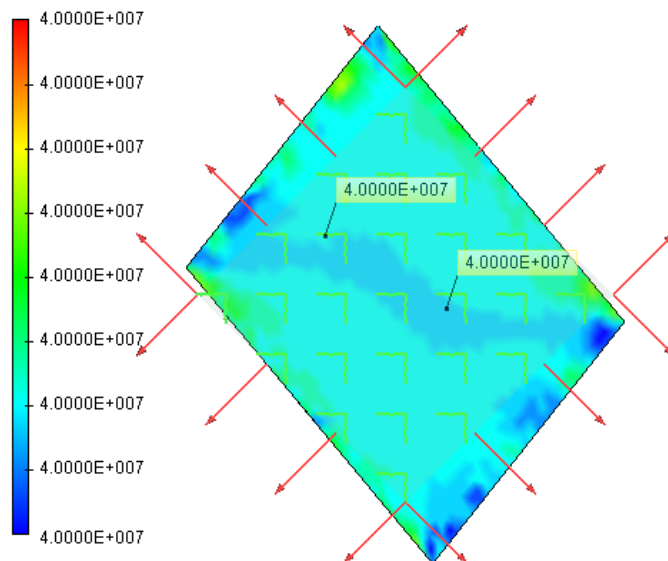


Рисунок 1.20-6 - Главные напряжения 1 ортотропной пластины

Задача: "Задача\_0"

Главное нормальное напряжение 2, Н/м²

Масштаб перемещений: 147.32

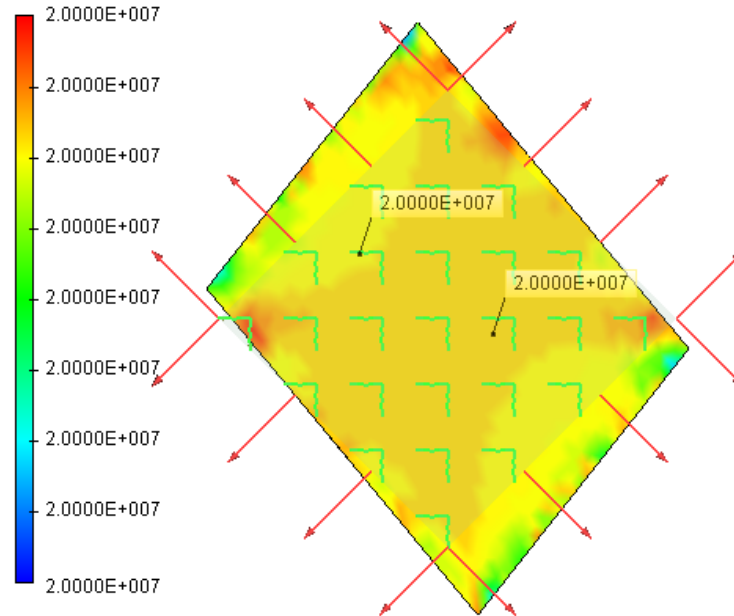


Рисунок 1.20-7 - Главные напряжения 2 ортотропной пластины

Среднее значение деформации ОХ  $\epsilon_x^* = 3.8801 \cdot 10^{-4}$ , деформации ОУ  $\epsilon_y^* = 2.0363 \cdot 10^{-3}$ ,  
Среднее значение напряжения ОХ  $\sigma_x^* = 3.000 \cdot 10^7$  Па, напряжения ОУ  $\sigma_y^* = 3.000 \cdot 10^7$  Па.  
Главные напряжения равны:  $\sigma_1^* = 4.000 \cdot 10^7$  Па,  $\sigma_2^* = 2.000 \cdot 10^7$  Па.

Аналитическое решение для главных напряжений имеет вид:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{L \cdot h}, \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{L \cdot h}$$

где  $F_{1,2}$  – сила Н,  $L$  – длина пластины,  $h$  – толщина пластины, м.

$\sigma_1 = 20000 / 0.005 / 0.01 = 4 \cdot 10^7$  Па,  $\sigma_2 = 10000 / 0.005 / 0.01 = 2 \cdot 10^7$  Па.

Напряжения по осям ОХ, ОУ рассчитываются по формулам:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha, \quad \alpha = 45^\circ$$

$$\sigma_x = \sigma_y = 4 \cdot 10^7 \cdot 0.5 + 2 \cdot 10^7 \cdot 0.5 = 3.0 \cdot 10^7 \text{ Па}$$

Деформации по осям ОХ, ОУ рассчитываются по формулам:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_1} - \frac{\nu_{21}\sigma_y}{E_2}, \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_2} - \frac{\nu_{12}\sigma_x}{E_1}, \quad \nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}$$

$$\nu_{21} = 0.277 \cdot 1.373 \cdot 10^{10} / 5.59 \cdot 10^{10} = 0.06804$$



$$\varepsilon_x = 3.0 \cdot 10^7 / 5.59 \cdot 10^{10} - 0.06804 \cdot 3.0 \cdot 10^7 / 1.373 \cdot 10^{10} = 3.88 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_y = 3.0 \cdot 10^7 / 1.373 \cdot 10^{10} - 0.277 \cdot 3.0 \cdot 10^7 / 5.59 \cdot 10^{10} = 2.036 \cdot 10^{-3};$$

Выполнив расчёт при помощи T-Flex Анализ, прямым методом, получили следующие результаты:

**Таблица 1**

Тип конечного элемента	Число узлов	Число конечных элементов
Квадратичный тетраэдр	1104	3338

**Таблица 2**

Главное напряжение	Численное решение, $\sigma^*$	Аналитическое решение $\sigma$	Ошибка $\delta_\sigma = \frac{ \sigma - \sigma^* }{\sigma} \times 100\%$
$\sigma_1$ , Па	$4.0 \times 10^7$	$4.0 \times 10^7$	0.00%
$\sigma_2$ , Па	$2.0 \times 10^7$	$2.0 \times 10^7$	0.00%

**Таблица 3**

Напряжение OX, OY	Численное решение, $\sigma^*$	Аналитическое решение $\sigma$	Ошибка $\delta_\sigma = \frac{ \sigma - \sigma^* }{\sigma} \times 100\%$
$\sigma$ OX, Па	$3.0 \times 10^7$	$3.0 \times 10^7$	0.00%
$\sigma$ OY, Па	$3.0 \times 10^7$	$3.0 \times 10^7$	0.00%

**Таблица 4**

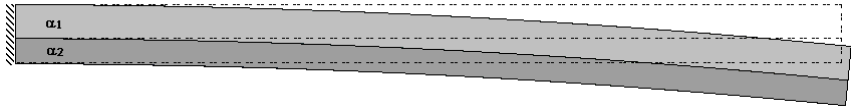
Деформации	Численное решение, $\varepsilon^*$	Аналитическое решение $\varepsilon$	Ошибка $\delta_\varepsilon = \frac{ \varepsilon - \varepsilon^* }{\varepsilon} \times 100\%$
$\varepsilon$ OX	$3.8801 \times 10^{-4}$	$3.88 \times 10^{-4}$	0.003%
$\varepsilon$ OY	$2.0363 \times 10^{-3}$	$2.036 \times 10^{-3}$	0.015%

**Вывод:**

Получена реалистичная картина распределения поля напряжений. Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила 0,015% по деформациям для квадратичного КЭ.

# Температурные напряжения биметаллического элемента

В различных температурных регуляторах применяются так называемые биметаллические элементы. Биметаллический элемент представляет собой две жестко соединенные металлические пластинки с различными коэффициентами температурного расширения  $\alpha_1, \alpha_2$ . При нагреве биметаллическая пластинка изгибается за счёт различного удлинения её составляющих (см. рис.). Если один конец пластинки неподвижно закрепить, то второй (свободный) конец переместится на некоторую величину.



Рассчитаем, как изменяется кривизна поверхности сая биметаллического элемента в зависимости от температуры нагрева.

Пусть биметаллический элемент состоит из пластинок, имеющих толщины  $h_1 = 5 \text{ мм}$ ,  $h_2 = 3 \text{ мм}$  и изготовленных из разных металлов (алюминий  $\alpha_1 = 2.4 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ ,  $E_1 = 6.9 \times 10^4 \frac{\text{H}}{\text{мм}^2}$ ,  $\nu_1 = 0.33$  и сталь  $\alpha_2 = 1.3 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ ,  $E_2 = 2.1 \times 10^5 \frac{\text{H}}{\text{мм}^2}$ ,  $\nu_2 = 0.28$ ). Пластины имеют одинаковую длину  $L = 250 \text{ мм}$  и ширину  $b = 40 \text{ мм}$ . Элемент нагревается от  $T_0 = 298.15 \text{ K}$  (или  $T_0 = 25^\circ \text{C}$ ) до  $T = 498.15 \text{ K}$  (или  $T = 225^\circ \text{C}$ ).

Пусть  $\frac{1}{\rho_0}$  – начальная кривизна поверхности сая, равная 0;  $\frac{1}{\rho}$  – кривизна поверхности сая после нагревания. Изменение кривизны найдём при помощи следующей формулы [9]:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{6(T - T_0)(\alpha_1 - \alpha_2)}{\left( \frac{(E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2)^2}{E_1 E_2 h_1 h_2 (h_1 + h_2)} + 4(h_1 + h_2) \right)}$$

Кривизна поверхности сая после нагревания биметаллического элемента  $\frac{1}{\rho} = 4,123 \times 10^{-4}$ ;  $\rho = 2425.43 \text{ мм}$ .

Выполнив расчет при помощи T-FLEX Анализ, получаем следующие результаты:

Таблица

1.

Параметры конечно-элементной сетки

Тип конечных элементов	Число главных узлов	Число узлов при расчёте задачи	Число конечных элементов
квадратичный тетраэдр (10 узлов)	7932	165231	35667

Таблица

2.

Результат «Кривизна поверхности сая»

Поверхно	Численное	Аналитическое	Ошибка
----------	-----------	---------------	--------

сть $S_{ij}$ раздела пластино к $i$ и $j$	решение Кривизна $\frac{1}{\rho_n}$ , $мм^{-1}$	решение Кривизна $\frac{1}{\rho_n}$ , $мм^{-1}$	$\delta = \frac{\left  \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_n} \right }{\left( \frac{1}{\rho} \right)} \times 100\%$
$S_{12}$	4.125E-004	4.123E-004	0,049

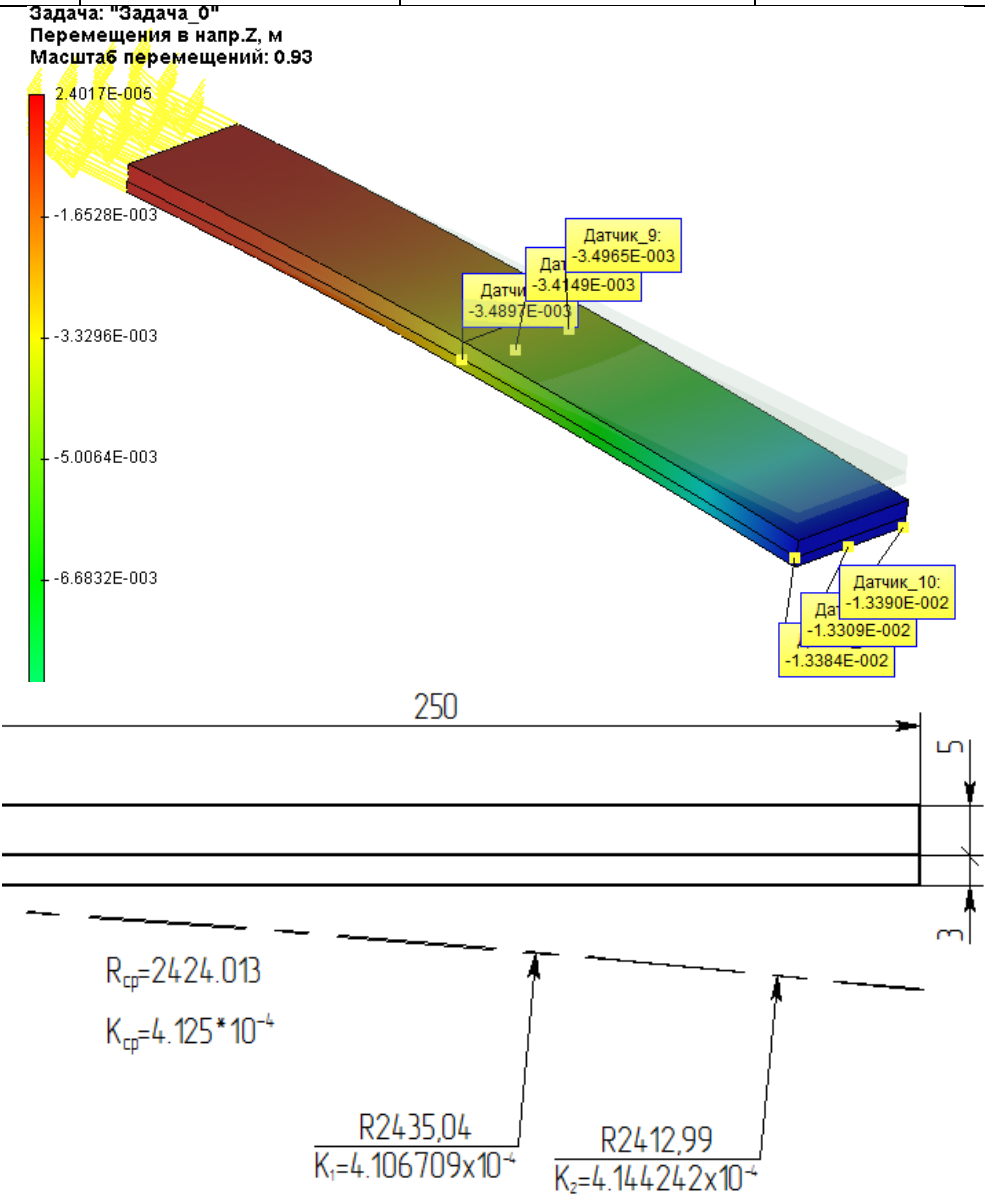


Рисунок 1.21-1 - Результат определения радиуса кривизны по трем точкам

Температурная деформация 3-D бруска

Рассмотрим брусок. Длина бруска  $L$ , ширина  $b$ , высота  $h$ .  
Искомые величины – это модули деформаций вдоль осей  $X,Y,Z$  спровоцированных изменением температуры.  
Рассмотрим следующие входные данные:  $L = 0.3$  м,  $b = 0.2$  м,  $h = 0.1$  м.  
Характеристики материала (сталь):  $E = 2.1E+011$  Па,  $\nu = 0.28$ , коэффициент линейного расширения  $\alpha = 1.3E-005$   $K^{-1}$ .  
Изменение температуры  $\Delta T$  равно  $100^{\circ}$ .

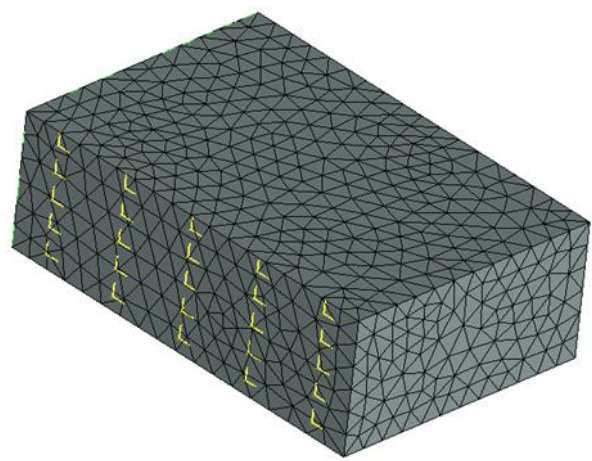


Рисунок 1.22-1 Расчетная модель с нагрузками и закреплениями

Аналитическое	решение	вычисляется	по	формулам:
$\Delta x$	=	$\alpha$	$L$	$\Delta T$
$\Delta y$	=	$\alpha$	$b$	$\Delta T$
$\Delta z = \alpha h \Delta T$				
Таким				образом,
$\Delta x$	=	2.60000000E-004		м
$\Delta y$	=	3.90000000E-004		м
$\Delta z = 1.30000000E-004$ м				

После вычислений с помощью T-FLEX получаем следующие результаты:

Таблица  
Параметры конечно-элементной сетки

1.

Тип конечных элементов	Число главных узлов	Число аргументов	Число конечных элементов
квадратичный тетраэдр (10 узлов)	1730	35775	7565

Таблица  
Результат «Перемещение»

2.

Численное решение $\Delta^*$ , м	Аналитическое решение $\Delta$ , м	Ошибка $\delta = 100\% *  \Delta^* - \Delta  /  \Delta $
2.60000007E-004	2.60000000E-004	0.27E-007
3.90000001E-004	3.90000000E-004	0.26E-007
1.300000004E-004	1.30000000E-004	0.30E-007

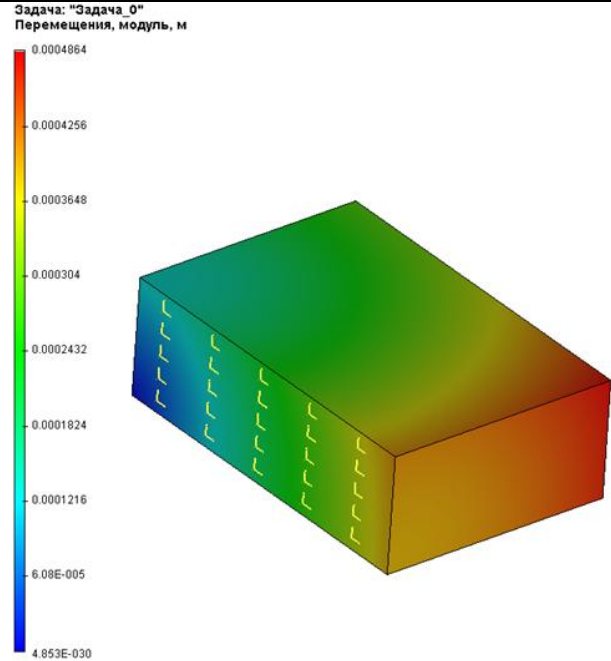


Рисунок 1.22-2 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (перемещения)

**Вывод:**

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила <0,001% для квадратичного КЭ.

**Примеры расчётов задач с контактами**

**Контакт плоской пружины**

Рассмотрим плоскую пружину, составленную из двух частей. Длина первой пластины 3L , длина второй 2L. Пластины имеют одинаковую ширину b и одинаковую высоту h. Пластины закреплены слева и нагружены справа с силой P. Предполагается, что пластины не соединены. Каждая пластина может свободно двигаться относительно другой (без трения).

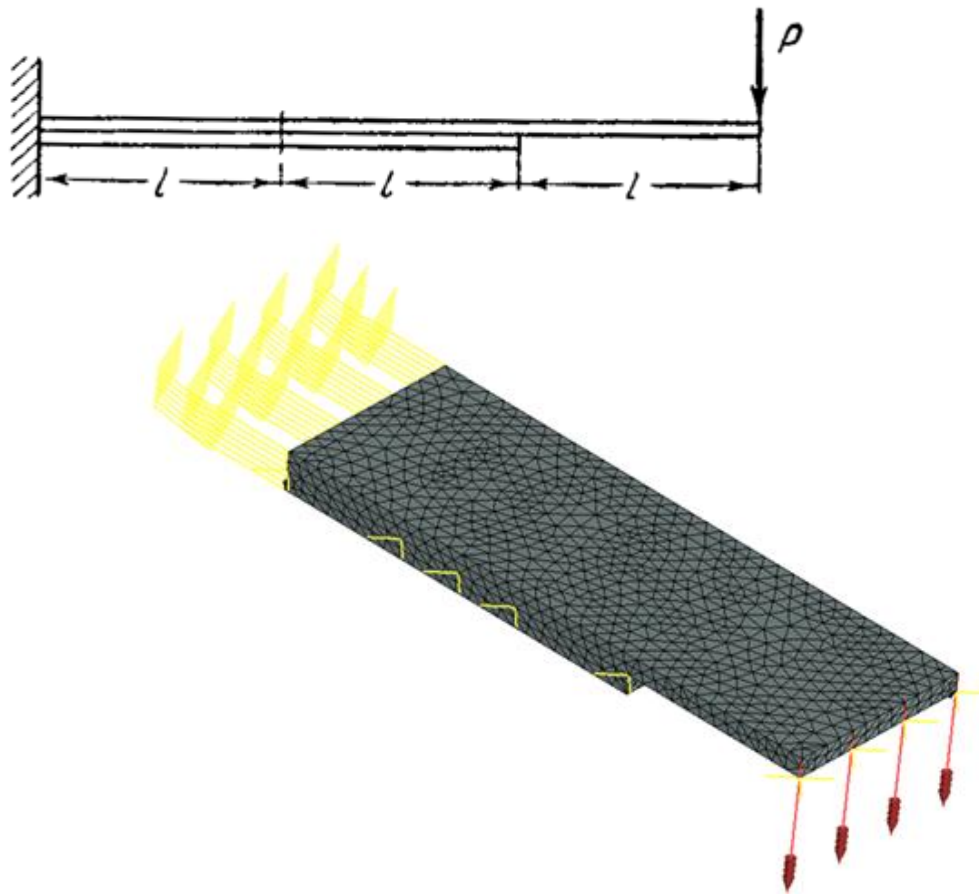


Рисунок 2.1-1 – Расчетная модель с нагрузками и закреплениями

Конечно-элементная модель при указанных нагрузке и закреплении.

Примем следующие входные данные: длина  $L$  равна  $0.05$  м , ширина  $b$  равна  $0.05$  м, высота  $h$  каждой пластины равна  $0.005$  м и величина приложенной силы  $P$  равна  $100$  Н. Свойства материала (сталь):  $E = 2.1E+011$  Па,  $\nu = 0.28$ . Максимальное вертикальное перемещение  $\Delta z$  может быть вычислено так:  $\Delta z = 118 \cdot P \cdot L^3 / 24 \cdot E \cdot J$ , где  $P$ - это приложенная сила,  $L$  - длина,  $J$  – осевой момент инерции.  $J = b \cdot h^3 / 12$ , где  $b$  - ширина и  $h$  – высота каждой пластины. Вычисления по приведенным выше формулам дают следующий результат:  $\Delta z = 5.6190E-004$  м .

После вычислений с помощью T-FLEX получаем следующие результаты:

Таблица 1.Параметры конечно-элементной сетки

Тип конечного элемента	Число вершин	Число конечных элементов
квадратичные тетраэдры	2143	7632

Таблица 2. Результат "Перемещение"

Численное решение $\Delta z^*/, м$	Аналитическое решение $\Delta z, м$	Ошибка $\delta=100\% *  \Delta z - \Delta z^* / \Delta z $
5.4829E-004	5.6190E-004	2.42

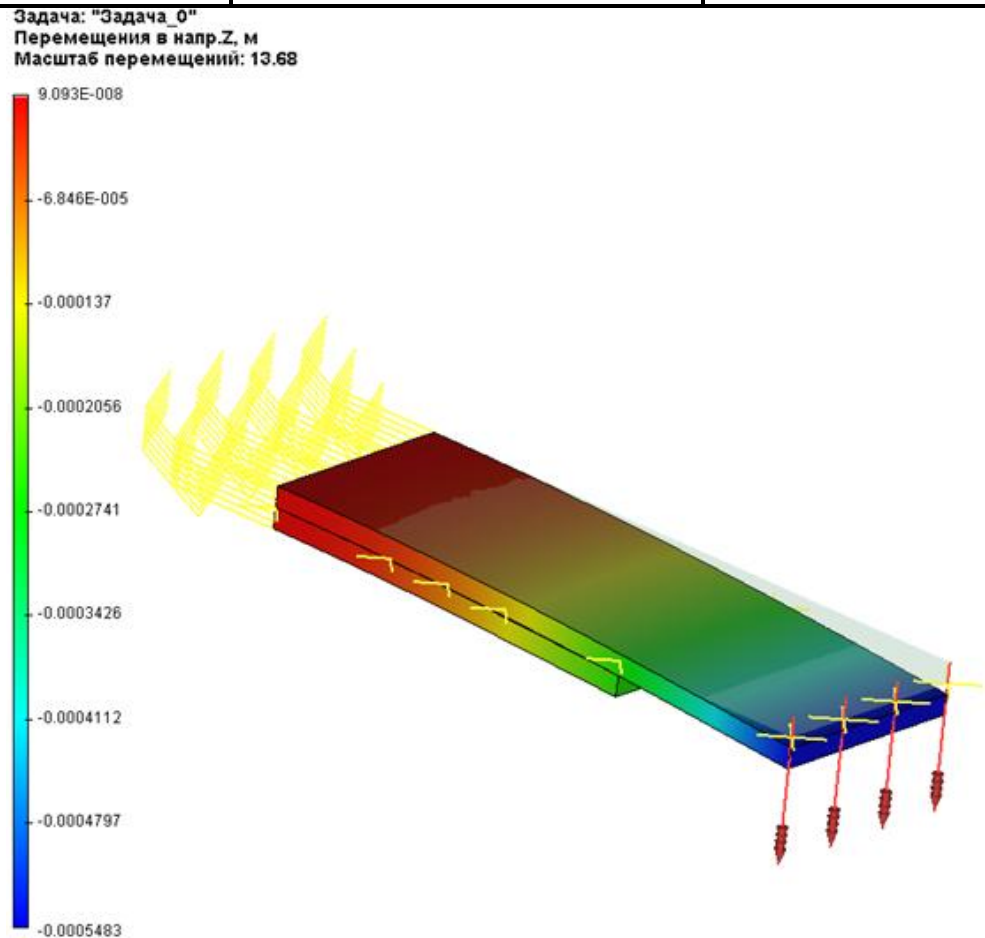


Рисунок 2.1-2 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (перемещения по Z)

**Вывод:**

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила 2,4% для квадратичного КЭ.

**Контакт оси и проушины**

Рассмотрим контакт оси и проушины по цилиндрической поверхности; трение не учитывается (см. рисунок). К свободному концу проушины приложена нормальная нагрузка P = 100 кН.

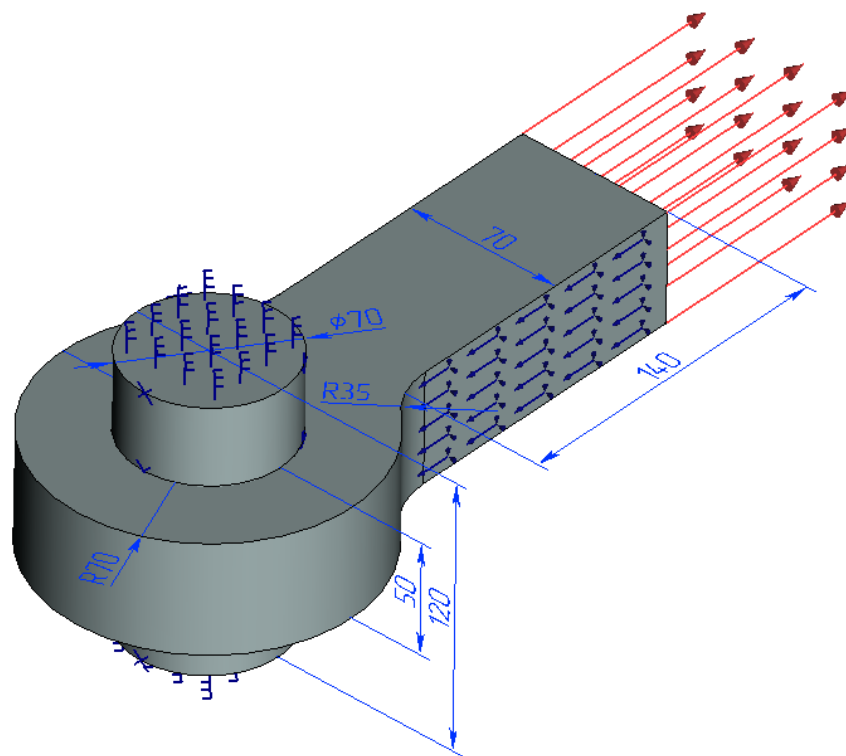


Рисунок 2.2-1 Расчетная модель с нагрузками и закреплениями

Примем следующие исходные данные: диаметр оси  $d = 30$  мм, длина оси  $H = 40$  мм, наружный радиус проушины  $R = 25$  мм, толщина проушины  $h = 10$  мм, ширина полосы проушины  $b = 20$  мм, длина полосы проушины  $b_1 = 40$  мм, радиус скругления проушины  $r_1 = 10$  мм.

Характеристики материала:  $E = 2.1 \times 10^{11}$  Па,  $\nu = 0.28$ .

Нормальное напряжение в сечениях ленты можно определить по полуэмпирической формуле [1, с. 190]:

$$\sigma = k \frac{P}{h(2R - d)},$$

где  $P$  – нормальная сила, Н;  $k$  – коэффициент концентрации напряжений,  $k = 3,6$ .

Расчет по вышеуказанным формулам дает величину  $\sigma = 1,029 \cdot 10^8$  Па.

Выполнив расчёт при помощи T-Flex Анализ, (оценить величину  $\sigma$  можно по главным напряжениям  $\sigma_1$ , получили следующие результаты: величина  $\sigma_1 = 1,027 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>.



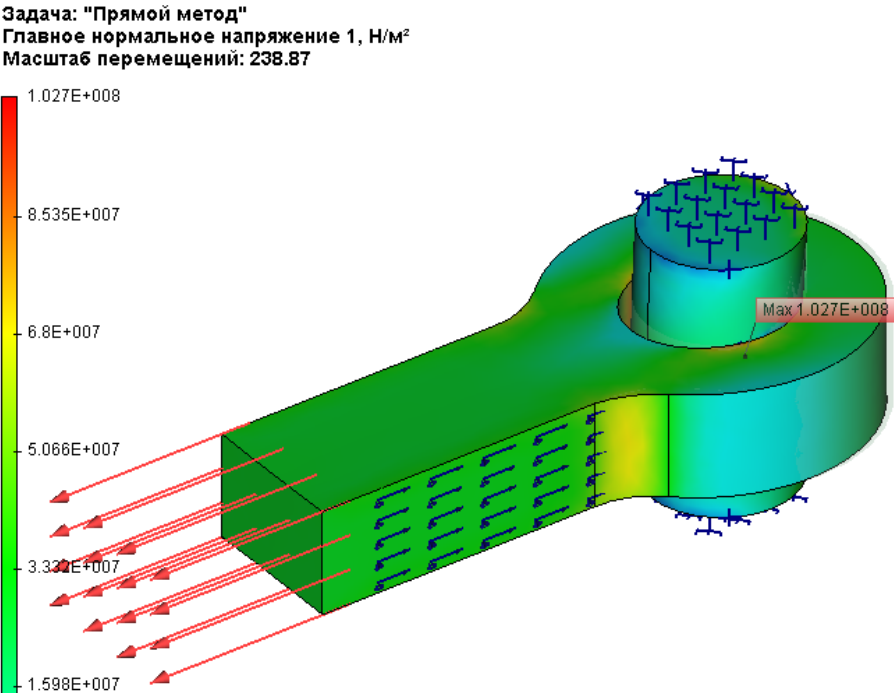


Рисунок 2.2-2 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (главное нормальное напряжение)

Результаты сведены в таблицу.

Таблица

Параметры конечно-элементной сетки

1.

Тип конечного элемента	Число вершин	Число конечных элементов
квадратичные тетраэдры	2241	10368

Таблица

Результаты расчетов, Напряжение  $\sigma$ , Н/м²

2.

Численное решение $w^*$	Аналитическое решение $w$ , м	Ошибка $\delta_u = \frac{ w - w^* }{w} \times 100\%$
$1,027 \cdot 10^8$	$1,223 \cdot 10^8$	19 %

# Примеры расчётов задач устойчивости

## Расчет устойчивости сжатого прямого стержня

Рассмотрим задачу устойчивости центрально сжатого прямого стержня (задача Эйлера). Прямой стержень, длина которого равна  $l$ , ширина и высота поперечного сечения –  $b$  и  $h$  соответственно, закреплен одним концом, а на другой действует сжимающая нагрузка величиной  $P$ . Необходимо найти коэффициент нагрузки, при котором стержень теряет устойчивость.

Примем длину стержня равной 0.5 м, характеристики поперечного сечения  $b=0.05$  м,  $h=0.02$  м.

Характеристики материала оставим заданными по умолчанию: модуль упругости  $E = 2.1E+011$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.28$ .

Граничные условия определим следующим образом. Нижнюю грань полностью закрепляем, а на верхнюю прикладываем распределенную силу величиной 1 Н.

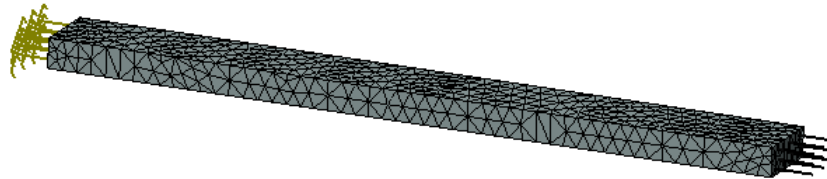
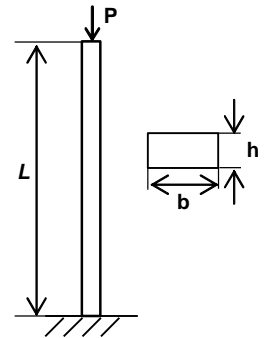


Рисунок 3.1-1 Расчетная модель с нагрузками и закреплениями

Конечно-элементная модель балки для задачи устойчивости стержня

Для данной задачи известно аналитическое решение [2, с.14]. Критическая нагрузка вычисляется по формуле:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = 6.9087 \times 10^4 \text{ Н} ,$$

где  $E$  – модуль упругости,  $J$  – момент инерции,  $l$  – длина стержня,  $\mu$  – коэффициент длины, зависящий от устройства опор и способа нагружения стержня. В данном случае  $\mu=2$ .

Выполнив расчет при помощи T-FLEX Анализ, получаем следующие результаты.

Таблица

1.

Параметры конечно-элементных сеток

Тип конечных элементов	Число узлов	Число конечных элементов
квадратичный тетраэдр (10 узлов)	839	2183

Таблица

2.

Результат «Критическая нагрузка»

Численное решение Критическая нагрузка	Аналитическое решение Критическая нагрузка	Ошибка
---	---	--------

$\sigma_{кр}, \frac{H}{M^2}$	$P_{кр}, \frac{H}{M^2}$	$\delta = \frac{ p_{кр} - \sigma_{кр} }{ p_{кр} } \times 100\%$
6.9341E+004	6.9087E+004	0.37

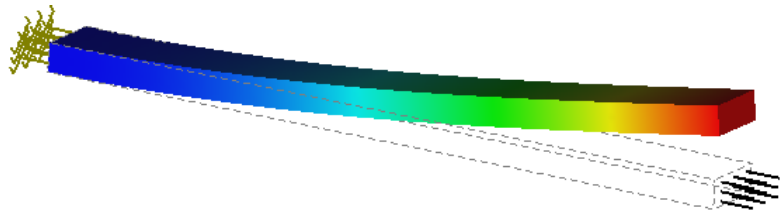


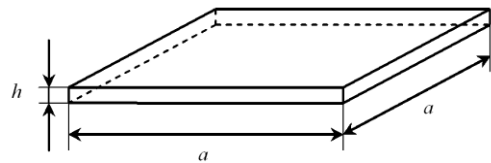
Рисунок 3.1-2 - Первая форма потери устойчивости стержня

**Вывод:**

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила 0,4% для квадратичного КЭ.

**Устойчивость квадратной пластины (+пластинчатый КЭ)**

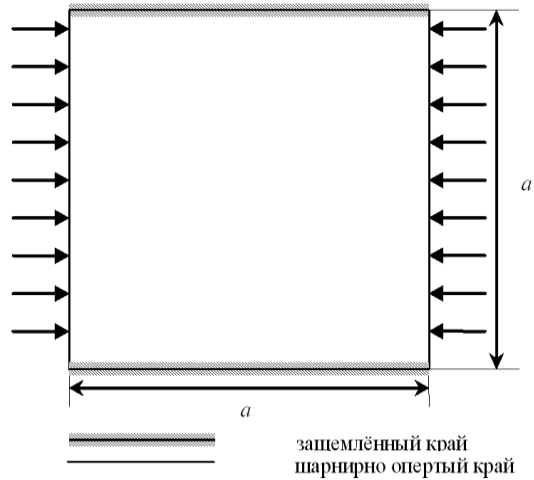
Рассмотрим квадратную пластинку со стороной  $a$  и толщиной  $h$  (см. рис.).



Толщина пластины  $h$  существенно меньше длины её стороны  $a$ .

Пластина равномерно сжата в поперечном направлении.

Рассмотрим случай, когда нагруженные края пластины закреплены шарнирно; ненагруженные края защемлены.



Примем следующие исходные данные: длина стороны пластины  $a = 500\text{мм}$ , толщина пластины  $h = 3\text{мм}$ , приложенная распределённая нагрузка  $P = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ .

Характеристики материала:  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{Па}$ ,  $\nu = 0.28$ .

Аналитическое решение этой задачи имеет вид [2]:

$$\sigma_{кр} = K \frac{\pi^2 D}{a^2 h},$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жесткость пластины,  $E$  – модуль упругости,  $K$  – коэффициент, значение которого зависит от способа закрепления краёв пластинки (в данном случае  $K = 7.69$ ).

Таким образом,  $\sigma_{кр} = K \frac{\pi^2 D}{a^2 h} = 0.5188 \times 10^8 \left[ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right]$ .

Выполнив расчет при помощи T-FLEX Анализ, получаем следующие результаты:

Таблица

Параметры конечно-элементных сеток

1.

Но мер сет ки	Тип конечных элементов	Число узлов	Число конечных элементов
1	линейный треугольник (6 узлов)	2238	4306
2	квадратичный треугольник(6 узлов)	2238	4306
3	квадратичный тетраэдр (10 узлов)	4594	13345

Таблица

Результат «Критическая нагрузка»

2.

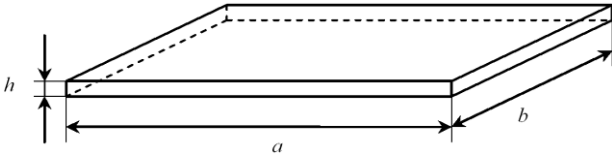
Но ме р  с е т к и	Численное решение Критическая нагрузка $q, \frac{H}{M^2}$	Аналитическое решение Критическая нагрузка $\sigma_{кр}, \frac{H}{M^2}$	Ошибка $\delta = \frac{ \sigma_{кр} - q }{ \sigma_{кр} } \times 100\%$
1	0.5260E+008	0.5188E+008	1.39
2	0.5281E+008	0.5188E+008	1.80
3	0.5277E+008	0.5188E+008	1.72

**Вывод:**

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим не превысила 2% для квадратичного КЭ.

**Устойчивость прямоугольной пластины (+пластинчатый КЭ)**

Рассмотрим прямоугольную пластинку со сторонами  $a, b$  и толщиной  $h$  (см. рис.).



Толщина пластины  $h$  существенно меньше других её размеров  $a$  и  $b$ .

Пластина равномерно сжата в поперечном направлении.

Рассмотрим случай, когда нагруженные края пластины закреплены шарнирно; один из ненагруженных краёв защемлён, а второй край свободен.



Примем следующие исходные данные: длина и ширина пластины  $a = 800\text{мм}$ ,  $b = 500\text{мм}$ , толщина пластины  $h = 3\text{мм}$ , приложенная распределённая нагрузка  $P = 1 \frac{H}{M^2}$ .

Характеристики материала:  $E = 2 \times 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\nu = 0.25$ .

Аналитическое решение этой задачи имеет вид [2]:

$$\sigma_{кр} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 h},$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жесткость пластины,  $E$  – модуль упругости,  $K$  – коэффициент,

значение которого зависит от способа закрепления краёв пластинки и отношения  $\frac{a}{b}$  (в данном случае  $K = 1.33$ ).

$$\text{Таким образом, } \sigma_{кр} = K \frac{\pi^2 D}{b^2 h} = 0.8401 \times 10^7 \left[ \frac{H}{M^2} \right].$$

Выполнив расчет при помощи T-FLEX Анализ, получили следующие результаты:

Таблица  
Параметры конечно-элементных сеток

1.

Но мер сет ки	Тип конечных элементов	Число узлов	Число конечных элементов
1	линейный треугольник (6 узлов)	2105	4040
2	квадратичный треугольник(6 узлов)	2105	4040
3	квадратичный тетраэдр (10 узлов)	4450	12833

Таблица  
Результат «Критическая нагрузка»

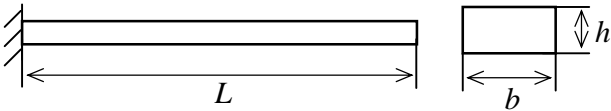
2.

Но м е р  с е т к и	Численное решение Критическая нагрузка $q, \frac{H}{M^2}$	Аналитическое решение Критическая нагрузка $\sigma_{кр}, \frac{H}{M^2}$	Ошибка $\delta = \frac{ \sigma_{кр} - q }{ \sigma_{кр} } \times 100\%$
1	0.8370E+007	0.8401E+007	0.37
2	0.8391E+007	0.8401E+007	0.12
3	0.8388E+007	0.8401E+007	0.15

Примеры задач частотного анализа

Определение собственных частот колебаний балки

Имеется консольно-закрепленная балка длиной  $L$  с прямоугольным поперечным сечением шириной  $b$  и высотой  $h$ .



Требуется определить первые три собственные частоты балки.

Примем  $L=0.5$  м,  $b=0.05$  м,  $h=0.02$  м.

Свойства материала: модуль упругости  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.28$ , плотность  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ .

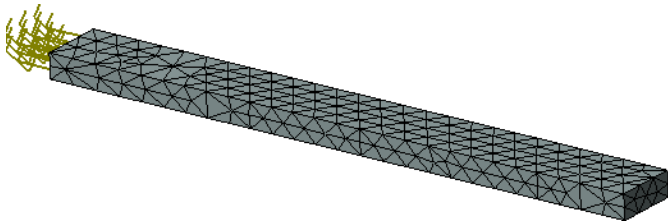


Рисунок 4.1-1 Расчетная модель с нагрузками и закреплениями

Конечно-элементная модель балки с закреплениями

Аналитическое решение имеет вид [3, с.382]:

$$f_i = \sqrt{\frac{E \cdot J}{\rho \cdot F}} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{k_i}{l} \right)^2,$$

где  $f_i$  - собственные частоты,  $E$  – модуль упругости материала,  $J$  – момент инерции,  $\rho$  – плотность материала,  $F$  – площадь поперечного сечения,  $l$  – длина балки,  $k_i$  - коэффициент, зависящий от формы колебаний ( $k_1 = 1.875$ ,  $k_2 = 4.694$ ,  $k_3 = 7.855$ ).

Результаты получились следующие:

Форма колебаний	Решение в T-FLEX, Гц	Аналитическое решение, Гц	Погрешность, %
	67.3	67.0	0.4
	419.1	420.2	0.3
	1162.4	1176.7	1.3

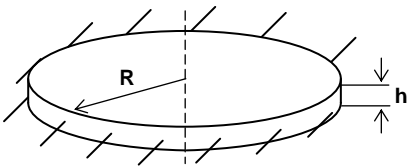
Вывод:

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила 0,4-1,3% для первой-третьей формы для квадратичного КЭ и растет с увеличением порядка формы.

Определение первой собственной частоты колебаний круглой пластинки

Для круглой пластины радиуса R и толщины h, зашечленной по контуру, необходимо определить собственную частоту первой формы колебаний.

Примем радиус пластины равным R=0.2 м, толщину пластины h=0.01 м. Свойства материала: модуль упругости  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.28$ , плотность  $\rho = 7800 \frac{кг}{м^3}$ .



Вследствие симметрии рассматриваем одну четвертую часть пластины, накладываем соответствующие граничные условия.

Выполним расчёт первой собственной частоты колебаний пластины, используя сначала тетраэдральные конечные элементы, а затем – треугольные. Сравним полученные результаты с аналитическим решением, которое имеет вид [3, с.452]:

$$f = \frac{10.21}{2\pi R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho \cdot h}} = 633.9 \text{ Гц},$$

где R – радиус пластины,  $\rho$  – плотность материала, h – толщина пластины,  $D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$  – изгибная жесткость.

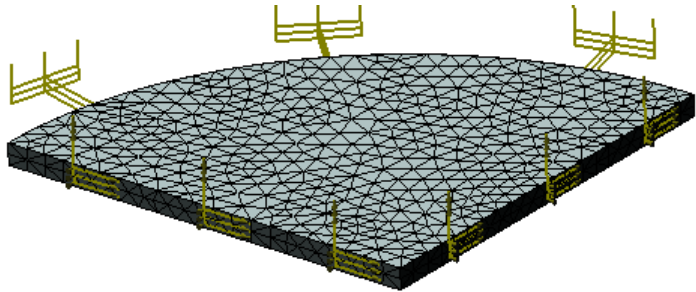


Рисунок 4.2-1 -Расчетная модель с нагрузками и закреплениями

Конечно-элементная модель пластины с закреплениями

Выполнив расчет при помощи T-FLEX Анализ, получили следующие результаты:

Таблица

Параметры конечно-элементных сеток

1.

Но мер сет ки	Тип конечных элементов	Число узлов	Число конечных элементов
1	линейный треугольник (6	1865	3580



	узлов)		
2	квадратичный треугольник(6 узлов)	1865	3580
3	квадратичный тетраэдр (10 узлов)	3938	11549

Таблица 2.  
Результат «Собственные частоты»

Но м е р  с е т к и	Численное решение Собственная частота $\lambda_1, Гц$	Аналитическое решение Собственная частота $f_1, Гц$	Ошибка $\delta = \frac{ f_1 - \lambda_1 }{ f_1 } \times 100\%$
1	632.2	633.9	0.26
2	630.6	633.9	0.51
3	631.7	633.9	0.34

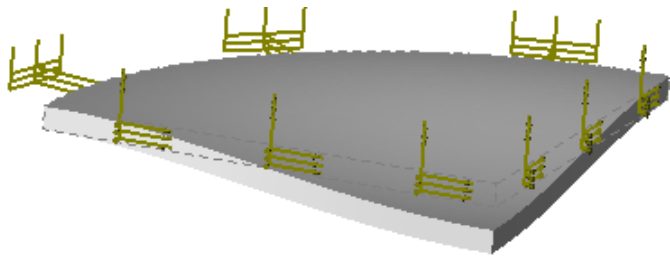


Рисунок 4.2-2 - Первая форма колебаний

Вывод:  
Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила 0,5-0,3% для первой формы для квадратичного треугольного и тетраэдрального КЭ соответственно, однако расчет тетраэдром требует в 3 раза большее число КЭ.

Свободные колебания сферического купола (+пластинчатый КЭ)

Рассмотрим сферический купол радиуса  $R$ , защемлённый по контуру (см. рис.).

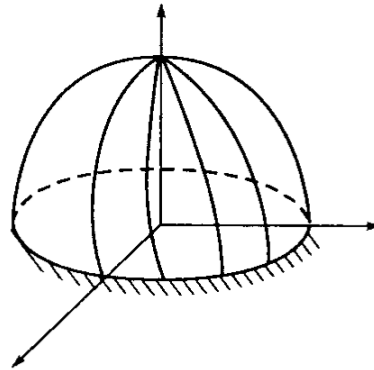


Рисунок 4.3-1 - Расчетная модель

Толщина купола  $h$  существенно меньше его радиуса  $R$ .

Численно моделировалась  $\frac{1}{4}$  часть сферической поверхности. На нижней кромке задавались условия жёсткого защемления, на боковых гранях – условия симметрии.

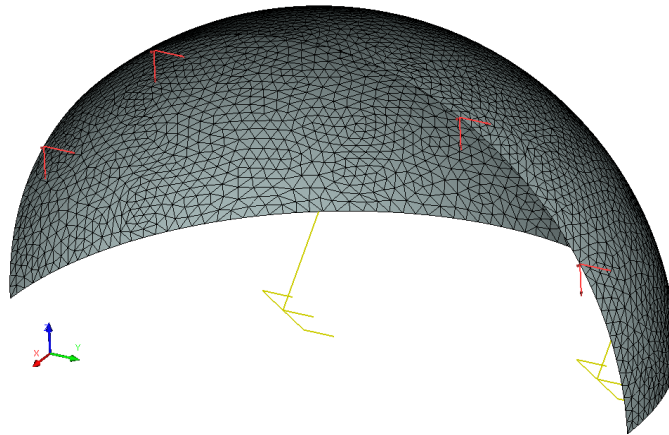


Рисунок 4.3-2 - Конечно-элементная модель сферической оболочки с закреплениями

Примем следующие исходные данные: радиус  $R = 300 \text{ мм}$ , толщина  $h = 3 \text{ мм}$  ( $\frac{R}{h} = 100$ ).

Характеристики материала:  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Па}$ ,  $\nu = 0.28$ ,  $\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

Решение этой задачи имеет вид [4]:

$$f_i = \frac{k_i \cdot \omega_0}{2\pi},$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho R^2 (1 - \nu^2)}},$$

$E$  – модуль упругости,

$k_i$  - коэффициент, значение которого для первых пяти частот: 0.5457, 0.7377, 0.8563, 0.8598, 0.9034.

Таким образом,  $f_1 = 1564.7 \text{ Гц}$ ,  $f_2 = 2115.3 \text{ Гц}$ ,  $f_3 = 2455.4 \text{ Гц}$ ,  $f_4 = 2465.4 \text{ Гц}$ ,  $f_5 = 2590.4 \text{ Гц}$ .

Выполнив расчет при помощи T-FLEX Анализ, получили следующие результаты:

**Таблица**

**1.**

**Параметры конечно-элементных сеток**

Но мер сет ки	Тип конечных элементов	Число узлов	Число конечных элементов
1	линейный треугольник (6 узлов)	2840	5510
2	квадратичный треугольник(6 узлов)	2840	5510
3	квадратичный тетраэдр (10 узлов)	5507	16387

**Таблица**

**2.**

**Результат «Собственные частоты». Сетка №1**

Но м е р собст венн ой частот ы $i$	Численное решение Собственная частота $\lambda_i, \text{Гц}$	Аналитическое решение Собственная частота $f_i, \text{Гц}$	Ошибка $\delta = \frac{ f_i - \lambda_i }{ f_i } \times 100\%$
1	1574.1	1564.7	0.59
2	2107.0	2115.3	0.39
3	2469.9	2455.4	0.59
4	2490.3	2465.4	1.01
5	2592.9	2590.4	0.10

**Таблица**

**3.**

**Результат «Собственные частоты». Сетка №2**

Но м е р собст венн ой частот ы	Численное решение Собственная частота $\lambda_i, \text{Гц}$	Аналитическое решение Собственная частота $f_i, \text{Гц}$	Ошибка $\delta = \frac{ f_i - \lambda_i }{ f_i } \times 100\%$
---	--	---	---

ты $i$			
1	1573.8	1564.7	0.58
2	2105.4	2115.3	0.47
3	2466.7	2455.4	0.46
4	2488.5	2465.4	0.94
5	2586.7	2590.4	0.14

Таблица

4.

Результат «Собственные частоты». Сетка №3

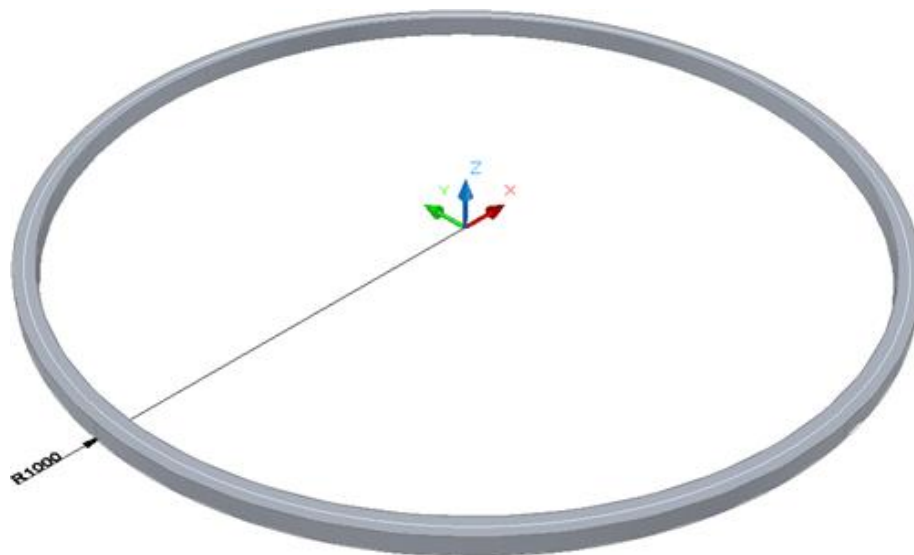
Номер собственной частоты $i$	Численное решение Собственная частота $\lambda_i, \text{Гц}$	Аналитическое решение Собственная частота $f_i, \text{Гц}$	Ошибка $\delta = \frac{ f_i - \lambda_i }{ f_i } \times 100\%$
1	1574.3	1564.7	0.61
2	2106.2	2115.3	0.43
3	2465.9	2455.4	0.43
4	2487.0	2465.4	0.88
5	2586.1	2590.4	0.17

**Вывод:**

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим не превысила 1%.

**Изгибные колебания кругового кольца**

Рассмотрим круговое кольцо. Радиус  $R$  центральной линии равен 1 м.



**Рисунок 4.4-1 – Кольцо с размерами**

Квадратное сечение намного меньше радиуса  $R$  . Длина стороны квадрата равна  $0.050$  м .  
Нижняя грань зафиксирована по нормали.



**Рисунок 4.4-2 - Конечно-элементная модель при указанных нагрузке и закреплении.**

Свойства материала:  $E = 2.0E+011$  Па,  $\nu=0.29$ ,  $\rho = 7900$  кг / м<sup>3</sup>.  
Аналитическое решение находится следующим образом:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EJ_i^2(1-i^2)^2}{\rho a^2 R^4(1+i^2)}}, \quad J = \frac{a^4}{12}.$$

Таким образом,  $f_2 = 31.015$  Гц,  $f_3 = 87.723$  Гц,  $f_4 = 168.201$  Гц,  $f_5 = 272.017$  Гц.

После вычислений с помощью T-FLEX получаем следующие результаты:

**Таблица** 1.  
**Параметры конечно-элементной сетки**

Тип конечного элемента	Число вершин	Число конечных элементов
квадратичные тетраэдры	1671	3722

**Таблица** 2.  
**Результат "Частоты"**

Численное решение $f_i^*$ , Гц	Аналитическое решение $f_i$ , Гц	Ошибка $\delta = 100\% *  f_i^* - f_i  /  f_i $
31.0	31.015	0.05
87.5	87.723	0.25
167.3	168.201	0.54
269.5	272.017	0.9

Задача: "Задача\_0"  
Относительные перемещения, модуль  
Форма 4 - резонансная частота: 30.984 Гц  
Масштаб перемещений: 0.91

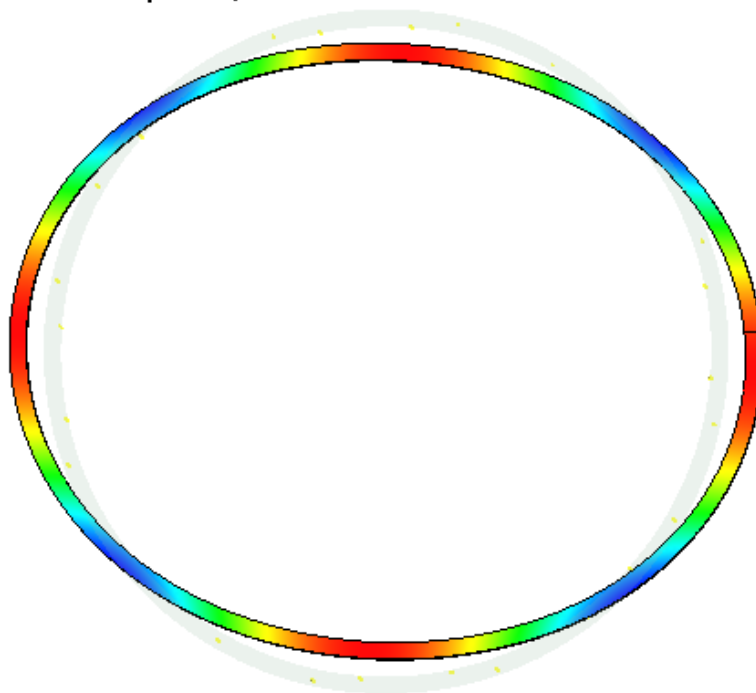


Рисунок 4.4-3 – Четвертая форма колебаний кольца

**Вывод:**

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим не превысила 0,9%.

**Осевые и поперечные частоты колебаний балки с весом**

Рассмотрим консольную балку, на правый конец которой приложен вес.

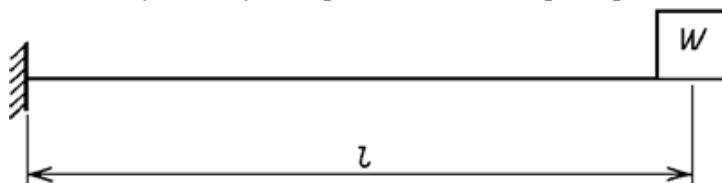


Рисунок 4.5-1 – Схема консольной балки с весом  $W$  на конце

Длина балки  $L$ . В поперечном сечении балка прямоугольная шириной  $b$  и высотой  $h$ . Масса груза  $M$ .  
Масса самой балки  $m$ .  
где  $F = b \cdot h$  – размеры сечения,  $\rho$  - плотность материала балки.

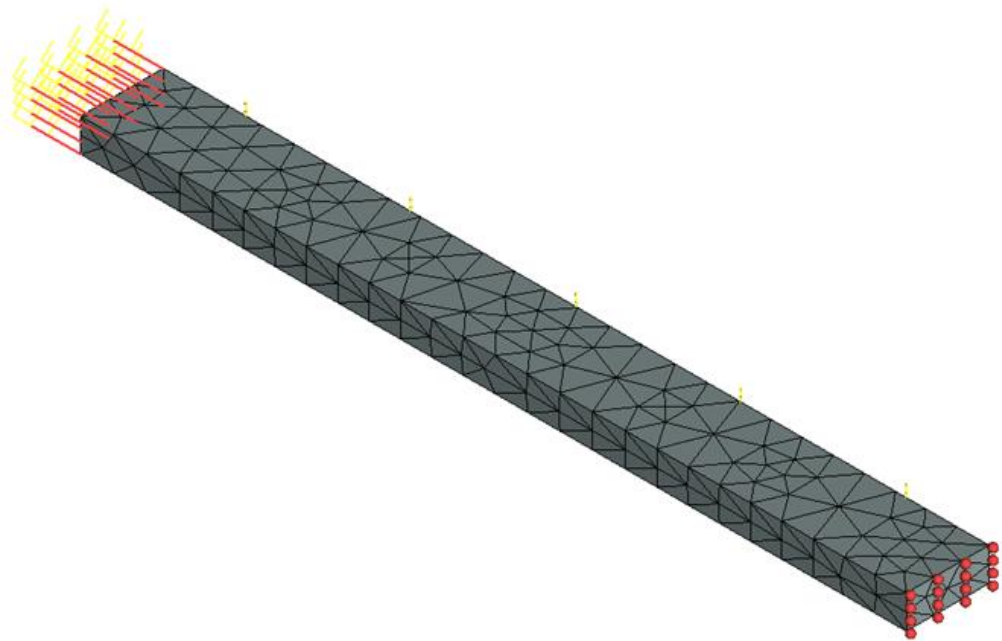


Рисунок 4.5-2 Расчетная модель с нагрузками и закреплениями

Конечно-элементная модель при указанных нагрузке и закреплении.  
Пусть  $L$  равно 0.5 м,  $b$  равно 0.02 м,  $h$  равно 0.05 м.  
Свойства материала (сталь):  $E = 2.1E+011$  Па,  $\nu=0.28$ ,  $\rho = 7800$  кг / м<sup>3</sup>.  
Масса груза  $M$  равна  $2 \cdot m \cdot L$  кг (т.е. 7.8 кг).  
Аналитическое решение получаем по следующим формулам:

а) Частота осевых колебания

$$\frac{f_A \cdot L \cdot \sqrt{\rho}}{\sqrt{E}} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{f_A \cdot L \cdot \sqrt{\rho}}{\sqrt{E}}\right) = \frac{mL}{M}$$

б) Частота поперечных колебаний

$$f_T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EJ}{\left(M + \frac{33}{140} mL\right) L^3}},$$
$$J = \frac{hb^3}{12}.$$

Таким образом,  $f_A = 1078.962$  Гц ,  $f_T = 22.092$  Гц.  
После вычислений с помощью T-FLEX получаем следующие результаты:

Таблица  
Параметры конечно-элементной сетки

1.



Тип конечного элемента	Число вершин	Число конечных элементов
квадратичные тетраэдры	314	787

Таблица

Результат "Частота"\*

2.

Численное решение $f^*$ , Гц	Аналитическое решение $f$ , Гц	Ошибка $\delta = 100\% *  f_i^* - f_i  /  f_i $
22.252	22.092	0.72
1080.462	1078.962	0.14

Задача: "Задача\_0"  
Относительные перемещения, модуль  
Форма 1 - резонансная частота: 22.252 Гц  
Масштаб перемещений: 0.07

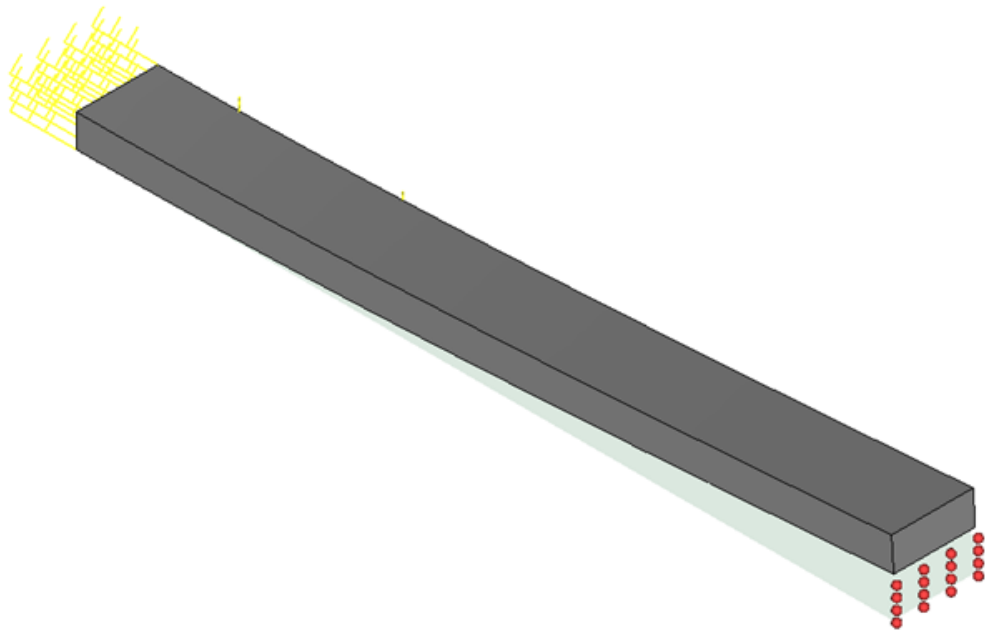


Рисунок 4.5-3 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (Форма 1)

## Первая собственная частота консольной балки под действием продольной растягивающей силы

Рассмотрим консольную балку. Длина балки  $L$ . В поперечном сечении балка прямоугольная шириной  $b$  и высотой  $h$ .



Балка закреплена с левого конца и нагружена продольной растягивающей силой  $P$  с правого конца.

Примем следующие входные данные: длина  $L$  балки 0.5 м, ширина  $b$  0.05 м, и высота  $h$  0.02 м, величина приложенной силы  $P$  50000 Н. Характеристики материала (сталь):  $E = 2.1E+011$  Па,  $\nu = 0.28$ . Искомая величина – первая собственная частота балки.

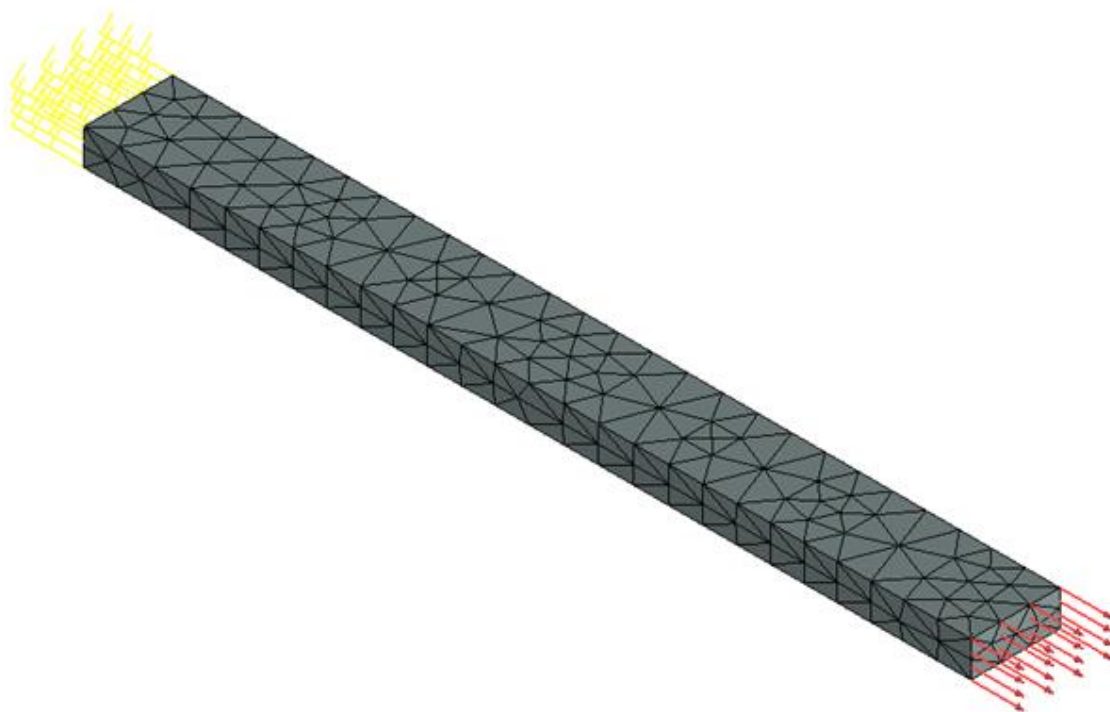


Рисунок 4.6-1 - Расчетная модель с нагрузками и закреплениями

Конечно-элементная модель при указанных нагрузке и закреплении.

Аналитическое решение выглядит следующим образом:

$$f_1^* = f_1 \cdot \sqrt{1 + \frac{5PL^2}{14EJ}}$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{k_1}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}},$$

где  $f_1$  – это первая собственная частота балки,  $J$  – момент инерции,  $\rho$  – плотность материала,  $F$  – площадь сечения,  $k_1 = 1.875$ .

Таким образом,  $f_1^* = 85.804$  Гц

После вычислений с помощью T-FLEX получаем следующие результаты:

Таблица 1.  
Параметры конечно-элементной сетки

Тип конечного элемента	Число вершин	Число конечных элементов
квадратичные тетраэдры	314	787

Таблица 2.  
Результат "Частота"

Численное решение $f^*$ , Гц	Аналитическое решение $f$ , Гц	Ошибка $\delta = 100\% *  f_i^* - f_i  /  f_i $
86.218	85.804	0.48

Задача: "Задача\_0"  
Относительные перемещения, модуль  
Форма 1 - резонансная частота: 86.218 Гц  
Масштаб перемещений: 0.00

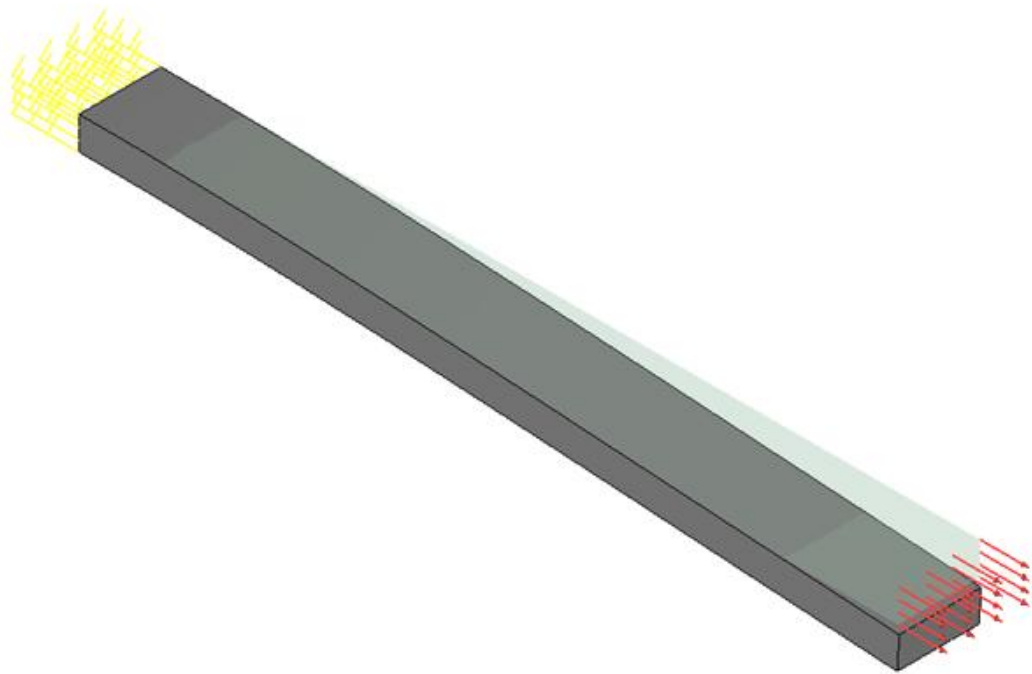


Рисунок 4.6-2 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (Форма 1)

Первая собственная частота системы на упругом основании

Рассмотрим массу, имеющую форму куба, расположенную на упругом основании.

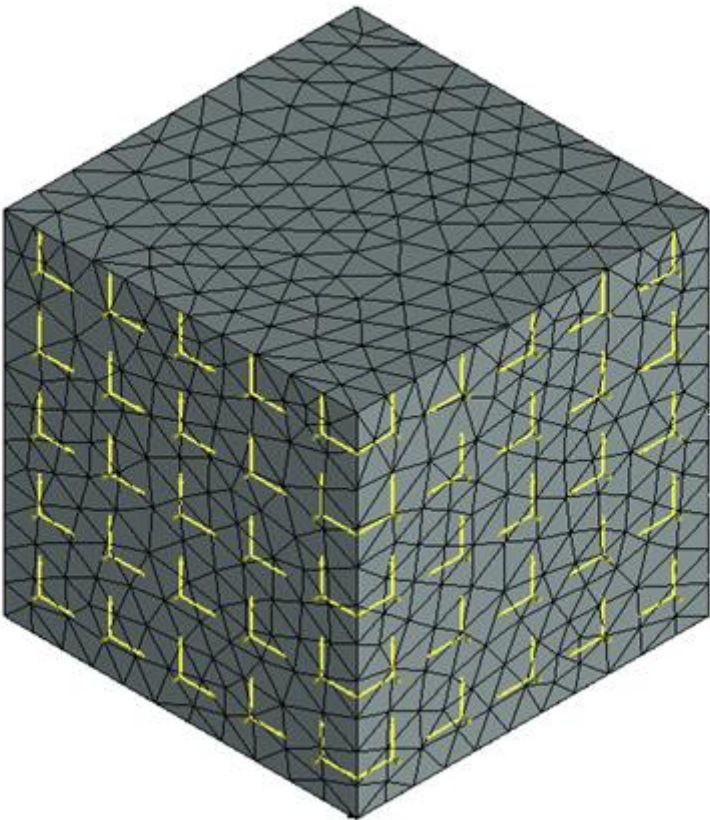


Рисунок 4.7-1 - Конечно-элементная модель при указанных нагрузке и закреплении.

Длина стороны куба равна  $L$ . Пусть  $L$  равно  $0.1$  м.  
Характеристики материала (сталь):  $E = 2.1E+011$  Па,  $\nu=0.28$ ,  $\rho = 7800$  кг / м<sup>3</sup>.  
Масса куба  $M$  рассчитывается по следующей формуле:  
 $M = \rho L^3$   
Таким образом,  $M = 7.8$  кг.  
Жесткость пружины  $k$  равна  $1000$  Н/м.  
Аналитическое решение получим по следующей формуле:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Таким образом, f= 1.802 Гц

После вычислений с помощью T-FLEX получаем следующие результаты:

Таблица

Параметры конечно-элементной сетки

1.

Тип конечного элемента	Число вершин	Число конечных элементов
квадратичные тетраэдры	1722	7505

Таблица

Результат "Частота"\*

2.

Численное решение $f^*$ , Гц	Аналитическое решение $f$ , Гц	<b>Ошибка</b> $\delta = 100\% *  f_i^* - f_i  /  f_i $
1.802	1.802	0.00

Задача: "Задача\_0"  
Относительные перемещения, модуль  
Форма 1 - резонансная частота: 1.802 Гц  
Масштаб перемещений: 0.00

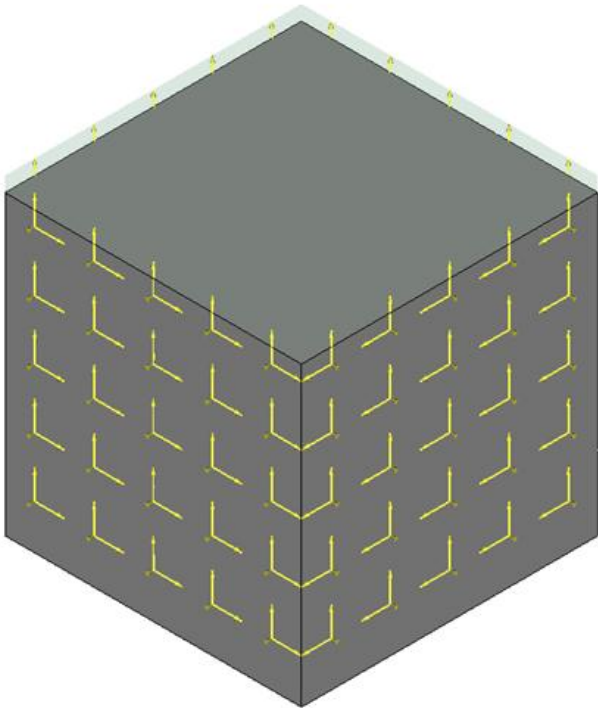


Рисунок 4.7-2 - –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (Форма 1)

## Примеры задач анализа вынужденных колебаний

### Вынужденные колебания грузика на пружине (силовое возбуждение)

Рассмотрим цилиндрический грузик, подвешенный на одном конце пружины, другой конец которой закреплен. (см. Рисунок 5.1-1). К свободному концу пружины приложена вертикальная вынуждающая нагрузка, изменяющаяся по синусоидальному закону.

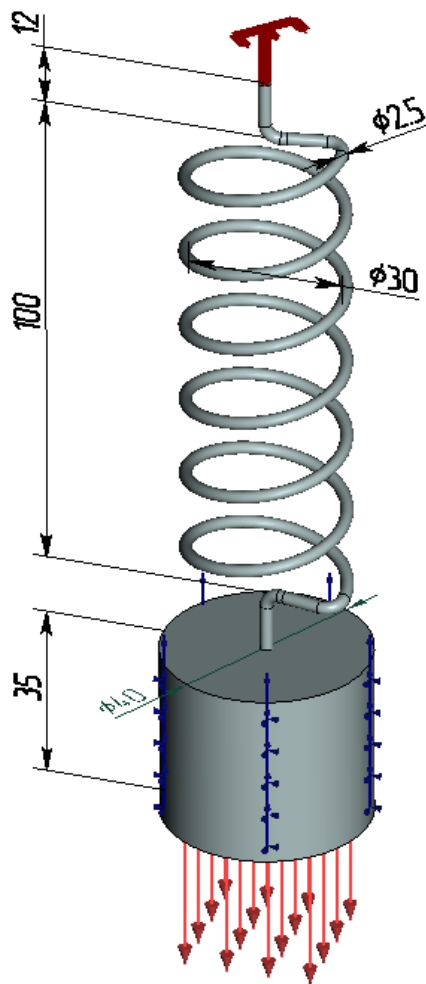


Рисунок 5.1-1 – Расчетная модель с граничными условиями

Примем следующие исходные данные: средний диаметр пружины  $D = 30$  мм, длина пружины  $H = 100$  мм, диаметр проволоки  $d = 2,5$  мм, число витков пружины  $n = 6$  мм. Параметры грузика: диаметр  $D_r = 40$  мм; высота  $H_r = 35$  мм, масса  $m_r = 0,34306$  кг, нагрузка  $P = 10$  Н и изменяется по синусоидальному закону.

Характеристики материала пружины и грузика:  $E = 2,1 \times 10^{11}$  Па;  $\nu = 0,28$ ;  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>;  $G = 8,203 \times 10^{10}$  Па.

Определить амплитуды колебаний грузика на первой собственной частоте и в диапазоне частот 4 – 20 Гц с шагом 4 Гц. Демпфирование по Рэлею:  $\alpha = 0,02$ ;  $\beta = 0,003531$ . Коэффициент демпфирования на частоте первой моды равен 15 % от критического.

Первая собственная частота свободных колебаний грузика определяется по формуле [1, с. 11 (ф.4)]:

$$f_c^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta z_{ст\_гр}}},$$

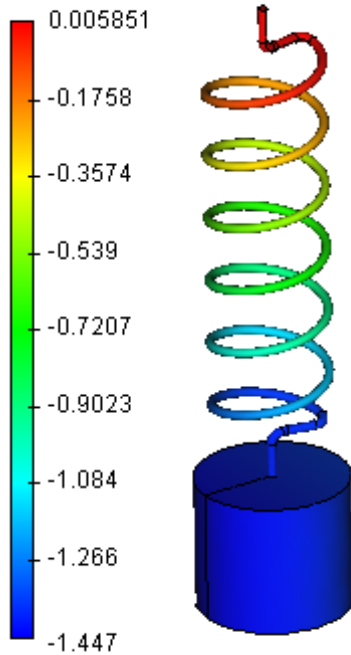
где  $g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;  $\Delta z_{ст\_гр}$  – статическое перемещение свободного конца пружины под весом грузика. Его можно определить по формуле [2, с. 232, (ф. 9.54)]:

$$\Delta z_{ст\_гр} = \frac{8m_g \cdot g \cdot D^3 \cdot n}{d^4 \cdot G},$$

где  $m_g$  – масса грузика, кг;  $D$  – средний диаметр пружины, мм;  $n$  – число витков пружины,  $d$  – диаметр проволоки, мм,  $G$  – модуль сдвига, Па.

Расчет по формуле дает  $\Delta z_{ст\_гр} = 1,361$  мм, расчет по МКЭ дает  $\Delta z_{\tilde{n}\tilde{o}-\tilde{a}\tilde{o}} = 1,446$  мм.

**Задача: "Статическое\_перемещение\_**  
**Перемещения в напр.Z, мм**  
**Масштаб перемещений: 5.49**



**Задача: "Собственная\_частота"**  
**Относительные перемещения, модуль**  
**Форма 1 - резонансная частота: 13.216 Гц**  
**Масштаб перемещений: 0.00**

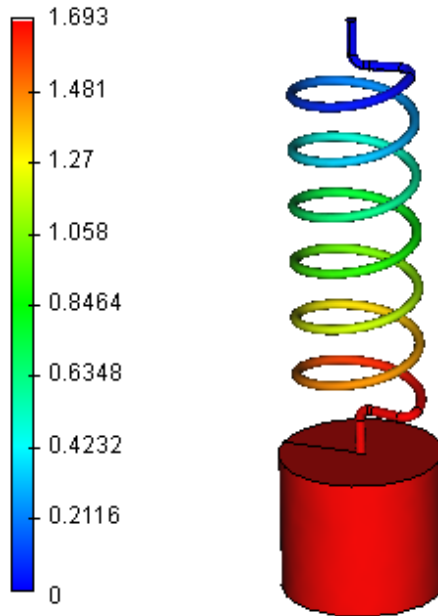


Рисунок 5.1-2 – Эпюры результатов

Теперь рассчитаем первую собственную частоту: расчет по формуле дает значение  $f_c^{(1)}=13.511$  Гц, расчет по МКЭ дает значение  $f_c^{(1)}=13.216$  Гц.

Перемещение свободного конца пружины под действием статической нагрузки можно определить по формуле [2, с. 232, (ф. 9.54)]:

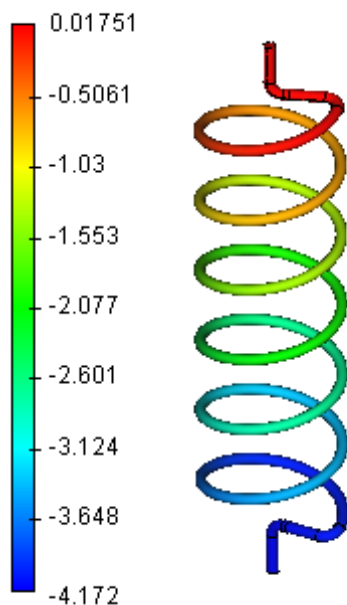
$$\Delta z_{cm} = \frac{8P \cdot D^3 \cdot n}{d^4 \cdot G},$$

где  $P$  – осевая сила, Н;  $D$  – средний диаметр пружины, мм;  $n$  – число витков пружины,  $d$  – диаметр проволоки, мм,  $G$  – модуль сдвига, Па.

Расчет по вышеуказанным формулам дает величину  $\Delta z_{cm} = 4,045$  мм. Статический расчет МКЭ дает  $\Delta z_{cm} = 4,172$  мм.



**Задача: "Статическое перемещение от вынуждающей силы"**  
**Перемещения в напр.Z, мм**  
**Масштаб перемещений: 1.49**



**Рисунок 5.1-3 – Эпюр результата перемещения по Z**

Теперь рассчитаем демпфированный коэффициент усиления амплитуд [1, с 74, (ф.1.47)]:

$$\beta_D = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_g}{\omega_c}\right)^2\right)^2 + \left(2\gamma \frac{\omega_g}{\omega_c}\right)^2}},$$

где  $\omega_g = 2\pi \cdot f_g$ ,  $\omega_c = 2\pi \cdot f_c$  - круговая частота вынуждающей силы и собственная круговая частота соответственно;  $\gamma = c / c_{кр} = 0,15$  - коэффициент демпфирования. В резонансе при  $f_b = f_c$  коэффициент усиления

$$\beta_D = \frac{1}{2\gamma}$$

Тогда амплитуда  $A_b$  вынужденных колебаний определится:

$$A_g = \beta_D \cdot \Delta z_{ст}$$

Расчет по формулам дает для  $f_b = 13.511$  Гц,  $\beta_D = 3,333$ ;  $A_b = 13,482$  мм.

Для расчета при помощи T-Flex Анализ определим коэффициенты демпфирования  $\gamma$  от Рэлеевских коэффициентов демпфирования по инерции  $\alpha$  и по жесткости  $\beta$  [1, 304, (ф.4.125)]:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2\omega_c} + \frac{\beta\omega_c}{2}$$

Для частоты  $f_c^{(1)} = 13,511$  значение  $\gamma = 0,15$ .

Величину амплитуды определяем по результату «Перемещения, амплитуда, Z»

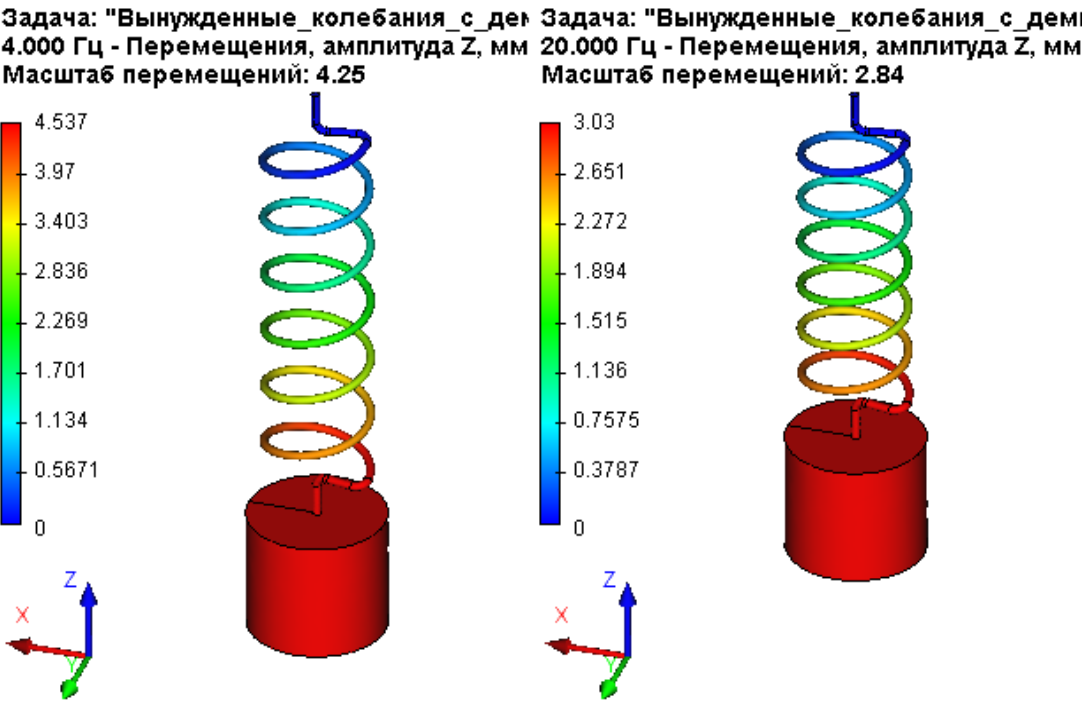


Рисунок 5.1-4 – Эпюры результатов

Результаты расчета сведены в таблицу.

Таблица  
Параметры конечно-элементной сетки и результаты расчета

1.

Тип конечного элемента	квадратичный тетраэдр (10 узлов)	
Число узлов	7614	
Число конечных элементов	30846	

Таблица  
Результаты расчета

Вынуждающая частота $f_B$ , Гц	Численное решение, $A_g^*$ , мм	Аналитическое решение $A_g$ , мм	Ошибка $\delta_u = \frac{ A_g - A_g^* }{A_g} \times 100\%$
4	4,538	4,412	2,852
8	6,295	6,007	4,792
12	12,98	11,896	9,117
13,511	13,65	13,482	1,245
16	7,068	7,536	6,209
20	3,034	3,182	4,643

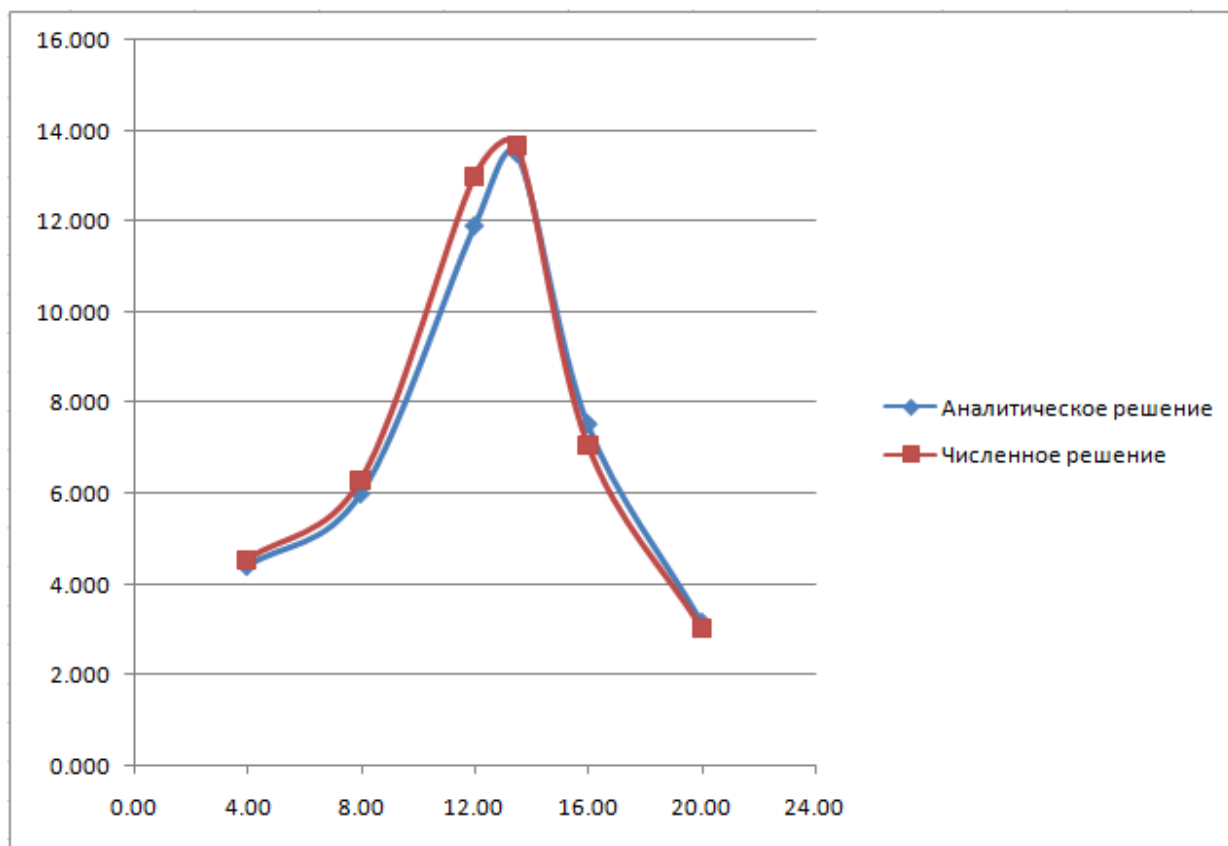


Рисунок 5.1-5 – Графики сравнения результатов

Вывод:

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим на резонансной частоте составила 1,25 %, однако в окрестности резонанса погрешность достигает 10 %.

### Вынужденные колебания груза на пружине (кинематическое возбуждение)

Рассмотрим цилиндрический грузик, подвешенный на одном конце пружины, другой конец которой закреплен на подвижном основании, совершающем осцилляции по синусоидальному закону. (см. рисунок). Амплитуда осцилляций основания равна 1.0 мм.

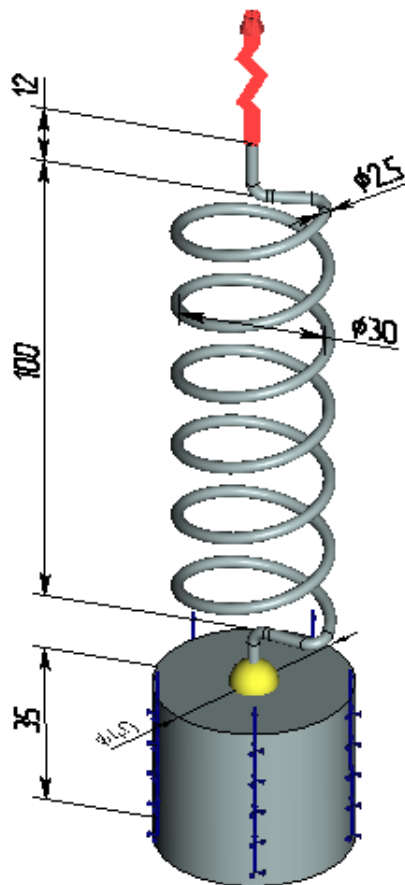


Рисунок 5.2-1 – Расчетная модель с граничными условиями и датчиком

Примем следующие исходные данные: средний диаметр пружины  $D = 30$  мм, длина пружины  $H = 100$  мм, диаметр проволоки  $d = 2,5$  мм, число витков пружины  $n = 6$  мм. Параметры грузика: диаметр  $D_r = 40$  мм; высота  $H_r = 35$  мм, масса  $m_r = 0,34306$  кг.

Характеристики материала пружины и грузика:  $E = 2,1 \times 10^{11}$  Па;  $\nu = 0,28$ ;  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>;

$G = 8,203 \times 10^{10}$  Па.

Определить амплитуды колебаний грузика на первой собственной частоте и в диапазоне частот 4 – 20 Гц с шагом 4 Гц. Коэффициенты Рэлеяского демпфирования:  $\alpha = 1,25$ ;  $\beta = 0,000297732$ . Коэффициент демпфирования  $\gamma$  на частоте первой моды равен 2 % от критического.

Для МКЭ расчета создадим сетку с размером элемента  $\sim 3$  мм. На верхний конец пружины приложим нагрузку «осциллятор» с амплитудой по оси Z, равной 1.0 мм, остальные амплитуды оставим равными нулю (по умолчанию). Цилиндрическую грань грузика ограничим частичным закреплением с возможностью перемещения по оси Z.

Первая собственная частота свободных колебаний грузика определяется по формуле [1, с. 11 (ф.4)]:

$$f_c^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta z_{cm\_zp}}},$$

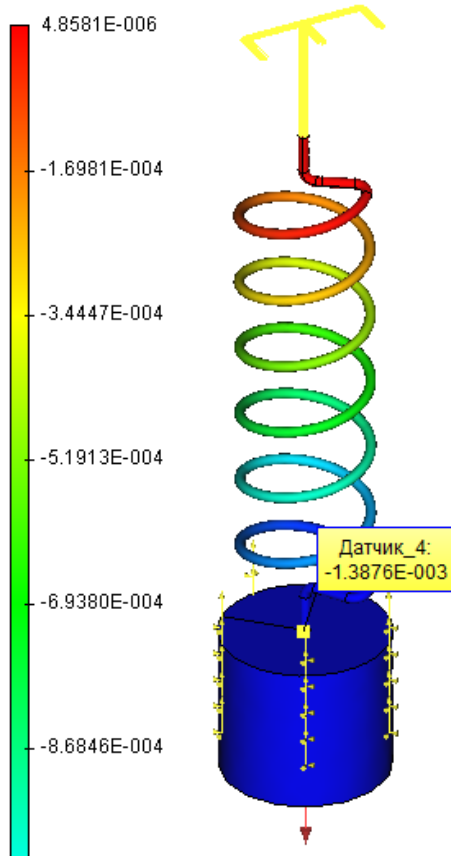
где  $g$  – ускорение свободного падения,  $m/c^2$ ;  $\Delta z_{ст\_гр}$  – статическое перемещение свободного конца пружины под весом грузика. Его можно определить по формуле [2, с. 232, (ф. 9.54)]:

$$\Delta z_{cm\_zp} = \frac{8m_g \cdot g \cdot D^3 \cdot n}{d^4 \cdot G},$$

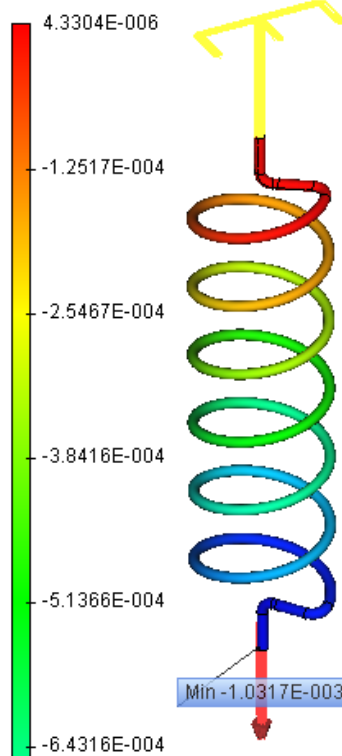
где  $m_g$  – масса грузика, кг;  $D$  – средний диаметр пружины, мм;  $n$  – число витков пружины,  $d$  – диаметр проволоки, мм,  $G$  – модуль сдвига, Па.

Расчет по формуле дает  $\Delta z_{cm\_zp} = -1.361$  мм, расчет по МКЭ дает  $\Delta z_{cm\_zp}^* = -1.388$  мм.

Задача: "Статическое перемещение под собственным весом"  
 Перемещения в напр. Z, м  
 Масштаб перемещений: 5.71



Задача: "Статическое перемещение от вынуждающей силы"  
 Перемещения в напр. Z, м  
 Масштаб перемещений: 6.01



Теперь рассчитаем первую собственную частоту: расчет по формуле дает значение  $f_c^{(1)} = 13.511$  Гц, расчет по МКЭ дает значение  $f_c^{(1)} = 13.216$  Гц.

Эквивалентную вынуждающую силу найдем исходя из перемещения основания, присоединенного к верхнему концу пружины:

$$P = \frac{\Delta z_{оч} d^4 \cdot G}{8D^3 \cdot n},$$

где  $P$  – эквивалентная вынуждающая сила, Н;  $D$  – средний диаметр пружины, мм;  $n$  – число витков пружины,  $d$  – диаметр проволоки, мм,  $G$  – модуль сдвига, Па.

Расчет по вышеуказанным формулам дает величину  $P = 2.472$  Н.

Рассчитаем демпфированный коэффициент усиления амплитуд [1, с 74, (ф.1.47)]:

$$\beta_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega_c}\right)^2\right)^2 + \left(2\gamma \frac{\omega_e}{\omega_c}\right)^2}},$$

где  $\omega_g = 2\pi \cdot f_g$ ,  $\omega_c = 2\pi \cdot f_c$  - круговая частота вынуждающей силы и собственная круговая частота соответственно;  $\gamma = c/c_{кр} = 0.02$  - коэффициент демпфирования. В резонансе при  $f_b = f_c$  максимальный коэффициент усиления

$$\beta_d = \frac{1}{2\gamma}$$

Тогда амплитуда  $A_b$  вынужденных колебаний определится:

$$A_g = \beta_d \cdot \Delta z_{cm}$$

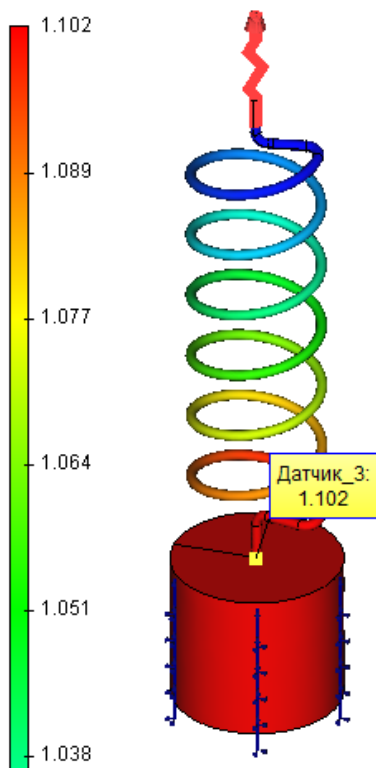
Для расчета при помощи AutoFEM Анализ определим коэффициенты демпфирования  $\gamma$  от Рэлеевских коэффициентов демпфирования по инерции  $\alpha$  и по жесткости  $\beta$  [1, 304, (ф.4.125)]:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2\omega_c} + \frac{\beta\omega_c}{2}$$

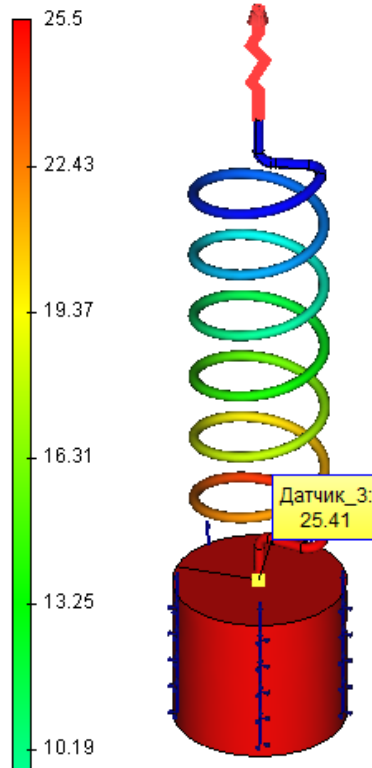
Для частоты  $f_c^{(1)} = 25.00$  Гц значение  $\gamma = 0.02$ ;

Величину амплитуды определяем по результату «Перемещения, амплитуда, Z»

**Задача: "Вынужденные колебания\_с демп"**  
**4.000 Гц - Перемещения, амплитуда Z, мм**  
**Масштаб перемещений: 7.90**



**Задача: "Вынужденные колебания\_с демп"**  
**13.216 Гц - Перемещения, амплитуда**  
**Масштаб перемещений: 7.21**



Результаты расчета сведены в таблицу.

Параметры сетки			
Тип конечного элемента	квадратичный тетраэдр (4 узла)		
Число узлов	7614		
Число конечных элементов	30846		
Результаты расчётов			
Вынуждающая частота f <sub>в</sub> , Гц	Численное решение, A <sub>ε</sub> <sup>*</sup> ,мм	Аналитическое решение A <sub>ε</sub> ,мм	Ошибка $\delta_u = \frac{ A_{\epsilon} - A_{\epsilon}^* }{A_{\epsilon}} \times 100\%$
4	1.096	1.102	0.554
8	1.538	1.584	2.907
12	4.671	5.633	20.5
13.126	25.41	25.00	1.66
16	2.466	2.169	-12.05
20	0.838	0.794	-5.17

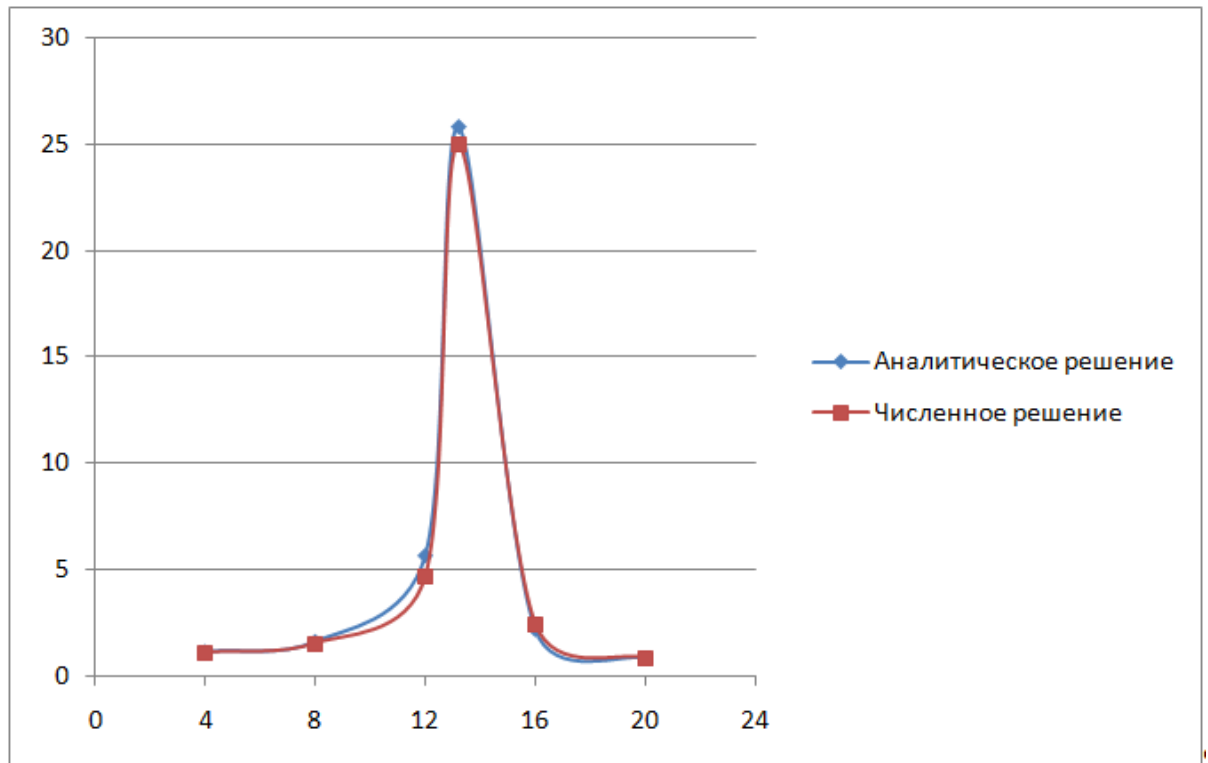


Рисунок 5.2-2 – Графики сравнения результатов



### Вывод:

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим на резонансной частоте составила 1,66 %, однако в окрестности резонанса погрешность колеблется от +20% до -12%.

## Примеры задач теплового анализа

### Установившаяся температура

Рассмотрим задачу установившегося потока тепла в пластине толщиной  $h$  с коэффициентом теплопроводности  $k$ , поверхность которой поддерживается при температурах  $t_1$  и  $t_2$  (см. рис.).

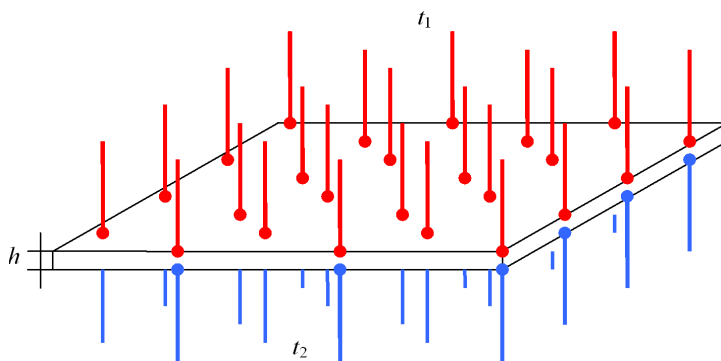


Рисунок 6.1-1 – Пластина с приложенными температурами

Изменение температуры вдоль толщины пластины  $h$  определяется соотношением [10]:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{t_2 - t_1}{h}, t_1 < t_2$$

Таким образом, тепловой поток в любой точке равен [10]:

$$f = -k \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k(t_2 - t_1)}{h} = \frac{(t_1 - t_2)}{R}, R = \frac{h}{k}, t_1 < t_2$$

Теперь предположим, что пластина является составной, то есть состоит из  $n$  пластинок с толщинами  $h_1, h_2, \dots, h_n$  и коэффициентами теплопроводности  $k_1, k_2, \dots, k_n$  соответственно. Тогда тепловой поток для каждой пластинки  $f_i, i = 1, 2, \dots, n$  определяется по формуле:

$$f_i = -\frac{k_i(t_{i+1} - t_i)}{h_i} = \frac{(t_i - t_{i+1})}{R_i}, R_i = \frac{h_i}{k_i}, t_i < t_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n$$

Пусть пластинки находятся в идеальном тепловом контакте по поверхностям раздела, тогда тепловой поток будет непрерывен при переходе из одной области в другую и, в данном случае, будет одинаков в любой точке (то есть,  $f_1 = f_2 = \dots = f_n = f$ ). Изменение температуры между противоположными поверхностями всей составной пластины будет равно сумме изменений температур в отдельных пластинках:

$$(t_1 - t_2) + (t_2 - t_3) + \dots + (t_i - t_{i+1}) + \dots + (t_n - t_{n+1}) = t_1 - t_{n+1}$$

Тогда

$$t_1 - t_{n+1} = f_1 R_1 + f_2 R_2 + \dots + f_n R_n = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) f, R_i = \frac{h_i}{k_i}, i = 1, 2, \dots, n,$$

$$f = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\frac{h_1}{k_1} + \frac{h_2}{k_2} + \dots + \frac{h_n}{k_n}}$$

Примем следующие исходные данные: число пластинок  $n = 3$ , длина и ширина каждой пластины равны  $0.5\text{ м}$  и  $0.3\text{ м}$  соответственно, толщины пластинок  $h_1, h_2, h_3$  равны  $0.007\text{ м}$ ,  $0.01\text{ м}$  и  $0.003\text{ м}$ . Приложенные температуры  $t_1$  и  $t_4$  равны  $273.15\text{ К}$  (или  $0^\circ\text{ C}$ ) и  $373.15\text{ К}$  (или  $100^\circ\text{ C}$ ) соответственно.

$$\text{Коэффициенты теплопроводности: } k_1 = 160 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}, k_2 = 390 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}, k_3 = 43 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$$

$$\text{Таким образом, } f = -7.1861 \times 10^5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}, t_2 = -R_1 f + t_1 = 304.5890 \text{ К},$$

$$t_3 = -(R_1 + R_2) f + t_1 = 323.0148 \text{ К}.$$

Выполнив расчет при помощи T-FLEX Анализ, получаем следующие результаты.

Таблица

Параметры конечно-элементной сетки

1.

Тип конечных элементов	Число главных узлов	Число узлов при расчёте задачи	Число конечных элементов
линейный тетраэдр (10 узлов)	3234	3234	13300

Таблица

Результат «Температура»

2.

Поверхность $S_{ij}$ раздела пластинок $i$ и $j$	Численное решение Температура $T^*$ , К	Аналитическое решение Температура $T$ , К	Ошибка $\delta = \frac{ T - T^* }{ T } \times 100\%$
$S_{12}$	3.04589000E+02	3.04588978E+02	7.2188E-006
$S_{23}$	3.23015000E+02	3.23014753E+02	7.6569E-005

Таблица3.  
Результат «Тепловой поток»

Численное решение Тепловой поток $f^*$ , Вт/м <sup>2</sup>	Аналитическое решение Тепловой поток $f$ , Вт/м <sup>2</sup>	Ошибка $\delta = \frac{ f - f^* }{ f } \times 100\%$
-7.18605000E+005	-7.18605212E+005	2.9461E-005

Поток тепла в шаре

Рассмотрим полый шар с внутренним радиусом  $r_1$  и внешним  $r_2$ , коэффициент теплопроводности  $\lambda$  которого постоянен. Внутренняя поверхность шара имеет температуру  $T_1$ . На внешней поверхности шара происходит теплообмен со средой температуры  $T_2$ . Интенсивность конвективного теплообмена характеризуется коэффициентом теплоотдачи  $\beta$ .

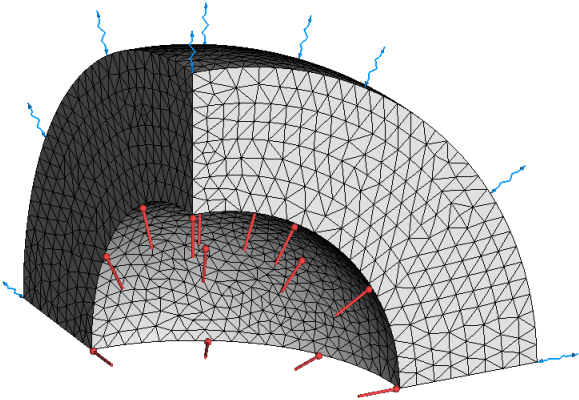


Рисунок 6.2-1 Расчетная модель с тепловыми нагрузками

Аналитическое решение задачи имеет вид [10]:

$$T = \frac{r_1 \cdot T_1 \cdot (\beta \cdot r_2^2 + r \cdot (1 - \beta \cdot r_2)) + \beta \cdot r_2^2 T_2 \cdot (r - r_1)}{r \cdot (\beta \cdot r_2^2 + r_1 \cdot (1 - \beta \cdot r_2))}$$

Для численного расчёта рассмотрим  $\frac{1}{8}$  полого шара (см. рис.). На боковых гранях зададим условия симметрии (тепловой поток через боковые грани равен 0).

Примем следующие исходные данные: внутренний радиус шара  $r_1 = 150\text{мм}$ , внешний радиус шара  $r_2 = 250\text{мм}$ . Коэффициент теплопроводности материала  $\lambda$ , из которого изготовлен шар, равен  $47 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$ .

Температура  $T_1$  на внутренней поверхности шара равна  $373.15\text{ K}$  (или  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Температура окружающей среды  $T_2$  равна  $298.15\text{ K}$  (или  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), коэффициент теплоотдачи  $\beta$  равен  $100\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}}$ .

Выполнив расчет при помощи T-FLEX Анализ, получаем следующие результаты.

Таблица

Параметры конечно-элементных сеток

1.

Номер сетки	Тип конечных элементов	Число главных узлов	Число узлов при расчёте задачи	Число конечных элементов
1	квадратичный тетраэдр (10 узлов)	4674	33357	21979
2	линейный тетраэдр (10 узлов)	4674	4674	21979

Таблица

Результат «Температура» при  $r = \frac{3r_1 + r_2}{4} = 0.175\text{ м}$

2.

Номер сетки	Численное решение Температура $T^*,\text{ K}$	Аналитическое решение Температура $T, \text{ K}$	Ошибка $\delta = \frac{ T - T^* }{ T } \times 100\%$
1	3.66138000E+002	3.66138033E+002	8.9883E-006
2	3.66166000E+002	3.66138033E+002	7.6384E-003

Таблица

Результат «Температура» при  $r = \frac{r_1 + r_2}{2} = 0.200\text{ м}$

3.

Номер сетки	Численное решение Температура $T^*,\text{ K}$	Аналитическое решение Температура $T, \text{ K}$	Ошибка $\delta = \frac{ T - T^* }{ T } \times 100\%$
1	3.60879000E+002	3.60879058E+002	1.5959E-005
2	3.60901000E+002	3.60879058E+002	6.0803E-003

Таблица

Результат «Температура» при  $r = \frac{r_1 + 3r_2}{4} = 0.225\text{ м}$

4.

Номер сетки	Численное решение Температура $T^*,\text{ K}$	Аналитическое решение Температура $T, \text{ K}$	Ошибка
-------------	--	---	--------

			$\delta = \frac{ T - T^* }{ T } \times 100\%$
1	3.56788000E+002	3.56788743E+002	2.0837E-004
2	3.56824000E+002	3.56788743E+002	9.8816E-003

Таблица

Результат «Температура» при  $r = r_2 = 0.250\text{ м}$

5.

Но мер сет ки	Численное решение Температура $T^*$ , K	Аналитическое решение Температура $T$ , K	Ошибка $\delta = \frac{ T - T^* }{ T } \times 100\%$
1	3.53482086E+002	3.53516492E+002	9.7325E-003
2	3.53476013E+002	3.53516492E+002	1.1450E-002

Теплопроводность цилиндрической стенки

Рассмотрим бесконечно длинную цилиндрическую стенку (трубу) с внутренним радиусом  $r_1$  и внешним  $r_2$ , коэффициент теплопроводности  $\lambda$  которой постоянен. Внутренняя поверхность трубы имеет температуру  $T_1$ . Внутри стенки имеются равномерно распределённые источники теплоты  $q_v$ . Выделившаяся в стенке теплота отводится в окружающую среду через внешнюю поверхность трубы (см. рис.).

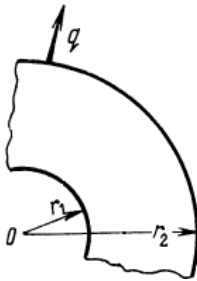


Рисунок 6.3-1 – Цилиндрическая стенка

Общее решение этой задачи имеет вид [11]:

$$T = C_1 \ln(r) + C_2 - \frac{q_v}{4\lambda} r^2.$$

Константы  $C_1$  и  $C_2$  определяются из условий, заданных на внутренней ( $r = r_1$ ) и внешней ( $r = r_2$ ) поверхностях трубы:  $T|_{r=r_1} = T_1$ ,  $\lambda \frac{dT}{dr}|_{r=r_2} = q$ . Таким образом,  $C_1 = \frac{r_2}{\lambda} \left( q + \frac{q_v r_2}{2} \right)$ ,

$$C_2 = T_1 - \frac{q r_2}{\lambda} \ln(r_1) - \frac{q_v}{4\lambda} (2r_2^2 \ln(r_1) - r_1^2).$$

Примем следующие исходные данные: внутренний радиус трубы  $r_1 = 100 \text{ мм}$ , внешний радиус трубы  $r_2 = 250 \text{ мм}$ , длина трубы  $l = 1000 \text{ мм}$ . Коэффициент теплопроводности материала  $\lambda$ , из которого изготовлена труба, равен  $43 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$ .

Мощность источников теплоты  $Q$ , находящихся внутри стенки, равна  $4500 \text{ Вт}$ . Так как источники теплоты  $q_v$  равномерно распределены по объёму трубы, то  $q_v = \frac{Q}{\pi \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot l} = 27283.705 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ .

Удельный тепловой поток на внешней поверхности трубы  $q = -15000 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ . Температура  $T_1$  на внутренней поверхности трубы равна  $373.15 \text{ К}$  (или  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ ).

Выполнив расчет при помощи T-FLEX Анализ, получаем следующие результаты.

Таблица

Параметры конечно-элементных сеток

1.

Номер сетки	Тип конечных элементов	Число узлов	Число узлов при расчёте задачи	Число конечных элементов
1	квадратичный тетраэдр (10 узлов)	13580	98620	66224
2	линейный тетраэдр (10 узлов)	13580	13580	66224

Таблица

Результат «Температура» при  $r = r_2 = 0.250 \text{ м}$

2.

Номер сетки	Численное решение Температура $T^*$ , К	Аналитическое решение Температура $T$ , К	Ошибка $\delta = \frac{ T - T^* }{ T } \times 100\%$
1	3.03077942E+002	3.03081513E+002	1.1782E-003
2	3.03014069E+002	3.03081513E+002	2.2253E-002

## Диск, нагреваемый по оси распределённой мощностью, с постоянной температурой по наружной цилиндрической поверхности

Рассмотрим двумерную задачу распределения установившейся температуры в торцевом сечении диска, на оси которого расположен нагреватель нулевой толщины (линия) с мощностью  $P=100$  Вт, а на периферии поддерживается постоянная температура  $0^\circ\text{C}$ .

Характеристики диска: металлический диск с толщиной  $d=5$  мм, радиусом  $R=100$  мм и теплопроводностью  $K=50$  Вт/(м ·  $^\circ\text{C}$ ).

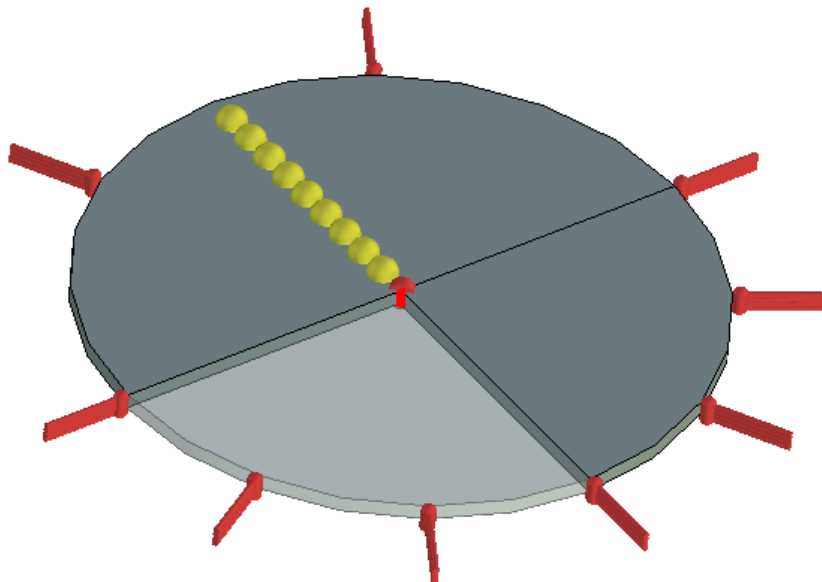


Рисунок 6.4-1– Расчетная модель с граничными условиями и датчиками

Решение этой задачи, в которой источник рассматривается как распределенный, можно получить из задачи для точечного источника тепла. Пусть начало координат совпадает с центром круглой поверхности диска. Решаемое дифференциальное уравнение для точечного источника имеет вид:

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) K = \rho \cdot \delta(P_0 - P)$$

Где  $\rho$  – плотность распределенной мощности. Для нашего случая:  $\rho = P / d$ . Решением данного уравнения является функция Грина  $G$  (функция источника).

$$u = G(P, P_0)$$

$$G(P, P_0) = \frac{\rho}{2K\pi} \left( \ln \left( \frac{1}{r} \right) - \ln \left( \frac{R}{r_0 \cdot r_1} \right) \right), P_0 \neq 0$$

$$G(P, P_0) = \frac{\rho}{2K\pi} \left( \ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{R} \right), \text{иначе}$$

$$P_0 = P_0(x_0, y_0)$$

$$P = P(x, y)$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$r_1 = \sqrt{\left( x - x_0 \frac{R^2}{r_0^2} \right)^2 + \left( y - y_0 \frac{R^2}{r_0^2} \right)^2}$$

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

В этом решении точка 0 соответствует центру диска. Ось Z координатной системы, в которой ищется решение, направлена вдоль оси диска.



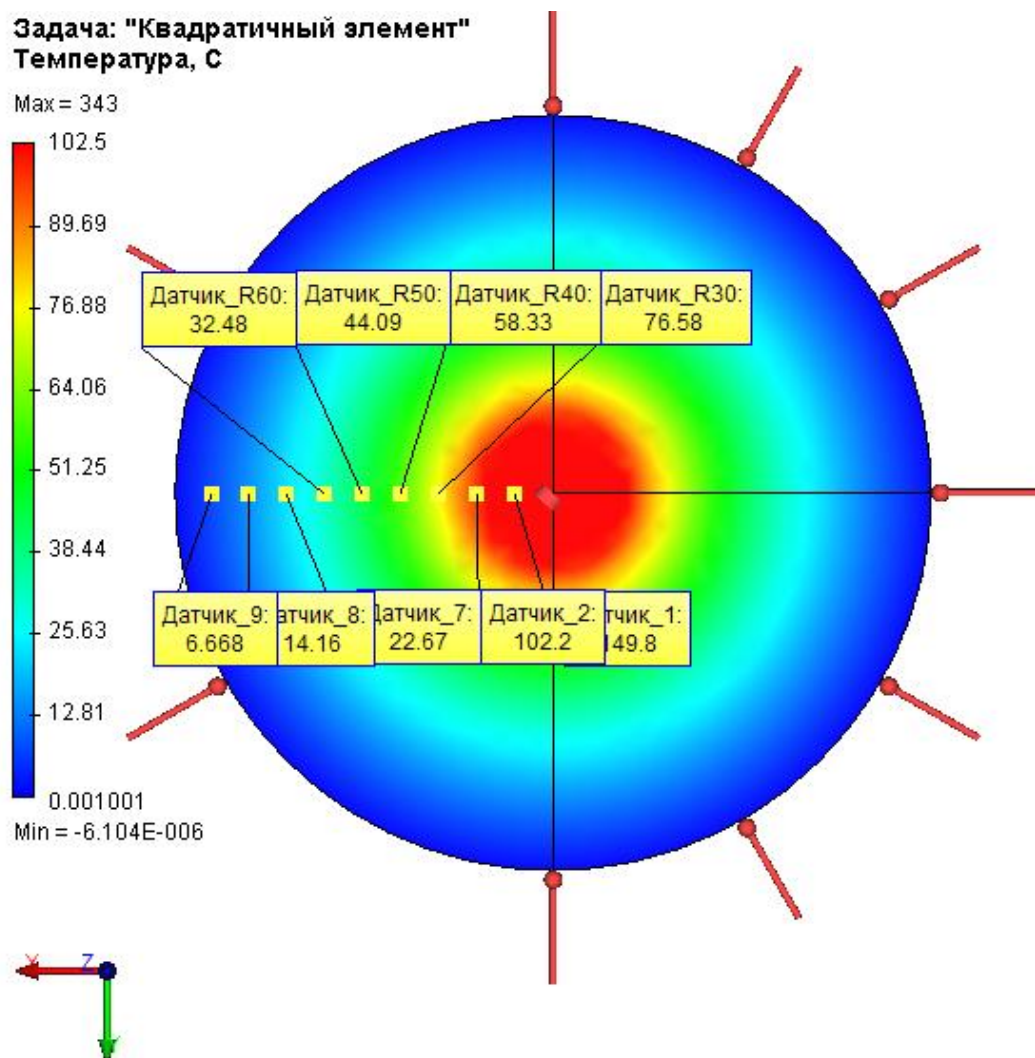


Рисунок 6.4-2 – Тепловое поле в торцевом сечении диска

На рисунке 2 представлена картина теплового поля от точечного источника (квадратичный элемент, относительный размер 0.02). Цветовая шкала была изменена по сравнению с установками по умолчанию: изменен верхний предел с 343 до 102.5 °С. Это сделано затем, чтобы подробнее рассмотреть результат вдали от центрального источника тепла. Из-за симметрии области значений аналитическое решение задачи с точечным источником совпадает с решением для распределенного источника тепла.

Сравним аналитическое решение задачи с полученным в T-Flex анализе. Аналитическое решение посчитано с точностью более 6-ти значащих цифр.

**Таблица**  
**Параметры пространственной сетки**

1

Тип конечных элементов	Число узлов сетки при расчете	Число элементов сетки	Относительный размер
Тетраэдр, 4 узла. Линейный конечный элемент.	716	2123	0.06
Тетраэдр, 4 узла. Квадратичный конечный элемент.	4247	2123	0.06

**Таблица**  
**Расчет линейным элементом**

2

Расстояние от центра диска до точки измерения $r$ , мм	30	40	50	60
Аналитическое решение, °C	76. 647 2	58. 332 8	44. 127 1	32. 520 1
Численное решение, °C	76. 846 7	58. 711 5	44. 584 9	32. 735 6
Относительная погрешность, %	0.2 602 83	0.6 492 05	1.0 374 57	0.6 626 67

**Таблица**  
**Расчет квадратичным элементом**

3

Расстояние от центра диска до точки измерения $r$ , мм	30	40	50	60
Аналитическое решение, °C	76. 647 2	58. 332 8	44. 127 1	32. 520 1
Численное решение, °C	76. 584 8	58. 328 3	44. 085 3	32. 484 9
Относительная погрешность, %	0.0 814 11	0.0 077 14	0.0 947 26	0.1 082 41

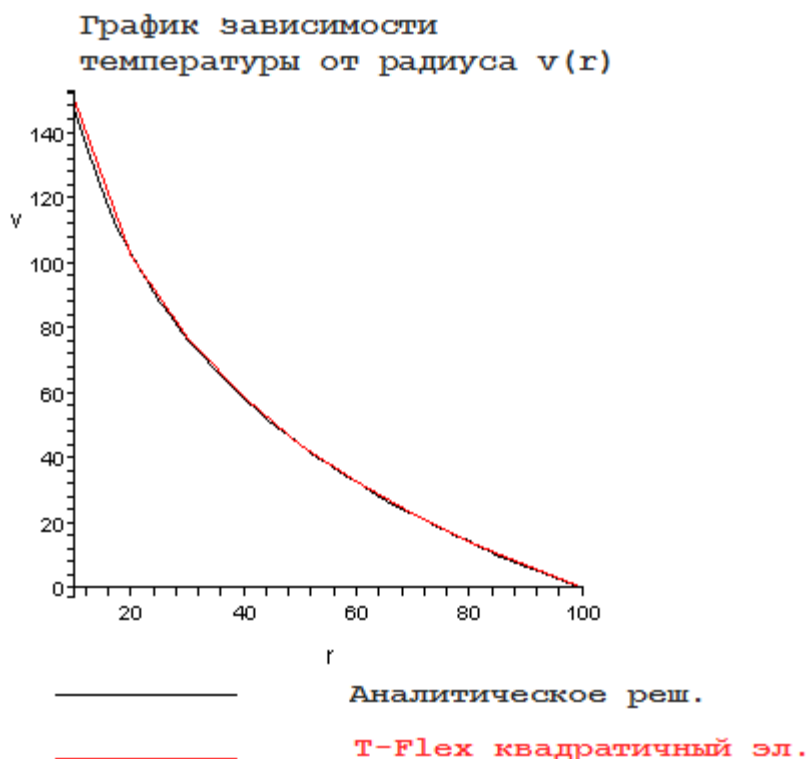


Рисунок 6.4-3 - График зависимости установившейся температуры от радиуса (мм)

### Вывод

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим не превысила 1% при использовании линейного и 0,1% при использовании квадратичного элемента на краю диска. Точность расчета при удалении от источника тепловой мощности растет по причине сингулярности аналитического решения в точке приложения мощности (в центре диска).

На графике зависимости температуры от радиуса видно, что аналитическое решение и численное решение практически совпали. Это говорит о том, что распределения температурных максимумов и минимумов одинаковы, следовательно, расчет тепловых потоков и мощности будет производиться так же точно.

Квадратичный элемент дал сходимость лучшую на порядок, чем линейный элемент. Однако потребовал примерно в 6 раз больше количества узлов/аргументов для решения.

### Распределённая мощность, приложенная к цилиндрической поверхности внутри диска

Рассмотрим двумерную задачу распределения установившейся температуры в торцевом сечении диска, внутри которого имеется нагреватель в виде цилиндрической поверхности с радиусом  $r_d=20$  мм, мощностью  $P=100$  Вт, а на периферии поддерживается постоянная температура  $0^\circ\text{C}$ .

Характеристики диска: металлический диск с толщиной  $d=5$  мм, радиусом  $R=100$  мм и теплопроводностью  $K=50$  Вт/(м · °С) – теплопроводность диска внутри и снаружи цилиндрической поверхности нагревателя одинакова.

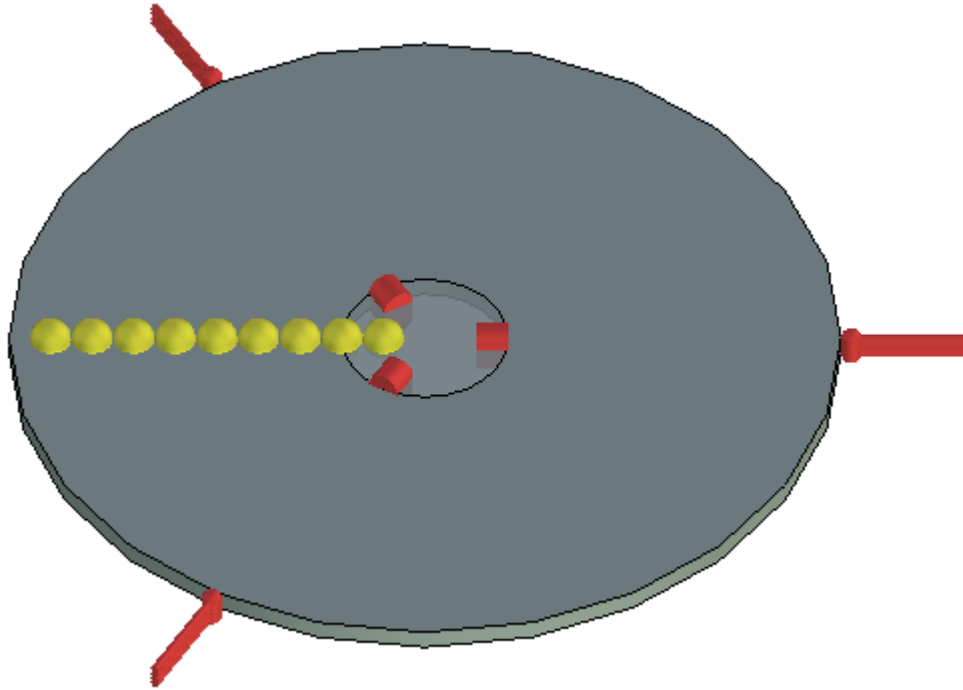


Рисунок 6.5-1 – Расчетная модель с граничными условиями и датчиками

Решение этой задачи, в которой источник рассматривается как распределенный, можно получить из задачи для точечного источника тепла (как в предыдущем примере). Пусть начало координат совпадает с центром круглой поверхности диска. Решаемое дифференциальное уравнение для точечного источника имеет вид:

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) K = \rho \cdot \delta(P_0 - P)$$

Решение этого уравнения известно<sup>1</sup>. Где  $\rho$  – плотность распределенной мощности. Для нашего случая:  $\rho = P / (2\pi \cdot r_d \cdot d) = P / S$ , где  $S$  – площадь поверхности цилиндра. Учтя для мощности ее распределение по кольцу цилиндра, выразим температуру как суммарную мощность всех приложенных точечных источников, проинтегрировав дельта-функцию в правой части по точке  $P_0$ . Получим уравнение:

$$\left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) K = \rho \cdot \int_{\Omega'} \delta(P_0 - P) d(P_0 \in \Omega')$$

<sup>1</sup> См. пример распределенная мощность на ребре.

Где  $\Omega$  – это множество точек поверхности диска,  $\Omega'$  – это множество точек, лежащих внутри поверхности диска, ограниченной кольцом цилиндра, на котором задана мощность (см. рис 1 – 2D плоское кольцо внутри круга). Решение этого уравнения  $v$  – это линейная комбинация (интеграл) решений для точечных источников:

$$v(P) = r_d \int_0^{2\pi} G_{II}(P, P_0(x(r_d, \theta), y(r_d, \theta))) d\theta$$

$$P_0(x(r_d, \theta), y(r_d, \theta)) = P_0(r_d \cdot \cos(\theta), r_d \cdot \sin(\theta))$$

Где  $G_{II}$  – это функция Грина, для мощности заданной формулой  $\rho = P/S$  для распределения по поверхности. Проинтегрировав, получим:

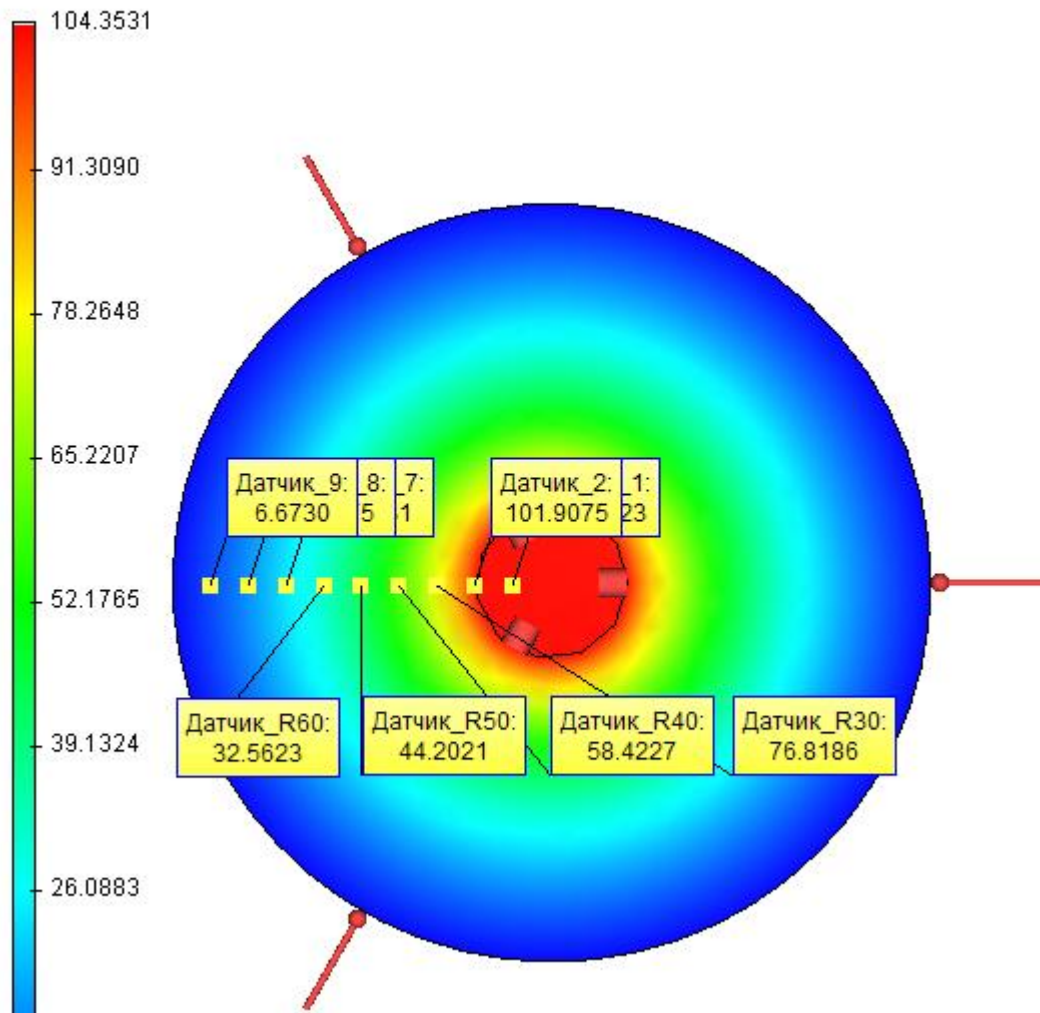
$$v(P) = G_I(P, 0), P \in \Omega \setminus \Omega'$$

$$v(P) = const, P \in \Omega'$$

$$0 \leftrightarrow x = 0, y = 0$$

То есть, что величина температуры  $v$  при этом будет совпадать с температурой от точечного источника (расположенного в центре круга) в точках внешних по отношению к кольцу, на котором задан распределенный источник. Во внутренних же точках температура примет значение, равное некоторой постоянной величине. Где  $G_{II}$  – это функция Грина, для мощности заданной формулой  $\rho = P/d$  для распределенного на ребре точечного источника. Отметим, что  $v$  – непрерывная функция, поэтому константа внутри вложенного цилиндра всегда известна.

**Задача: "Квадратичный элемент"**  
**Температура, С**



**Рисунок 6.5-2 – Картина теплового поля**

Сравните с картиной поля от источника, распределенного на ребре. Видно что они совпадают (рисунок сделан при расчете квадратичным элементом).

Сравним численное решение, полученное в T-Flex анализе с аналитическим.

**Таблица**  
**Параметры пространственной сетки**

**1**

Тип конечных элементов	Число узлов сетки при расчете	Число элементов сетки	Относительный размер
------------------------	-------------------------------	-----------------------	----------------------

Тетраэдр, 4 узла. Линейный конечный элемент.	691	1998	0.06
Тетраэдр, 4 узла. Квадратичный конечный элемент.	4060	1998	0.06

Таблица  
Расчет  
 $r$  – расстояни от центра круглой поверхности диска до точки измерения

линейным  
элементом

2

Координата радиуса $r$ , мм	30	40	50	60
Аналитическое решение, °C	76. 647 2	58. 332 8	44. 127 1	32. 520 1
Численное решение, °C	77. 211 1	59. 568 5	44. 690 8	32. 647 3
Относительная погрешность, %	0.7 357 08	2.1 183 62	1.2 774 46	0.3 911 43

Таблица  
Расчет квадратичным элементом

3

Координата радиуса $r$ , мм	30	40	50	60
Аналитическое решение, °C	76. 647 2	58. 332 8	44. 127 1	32. 520 1
Численное решение, °C	76. 818 6	58. 422 7	44. 202 1	32. 562 3
Относительная погрешность, %	0.2 236 21	0.1 541 15	0.1 699 63	0.1 297 66

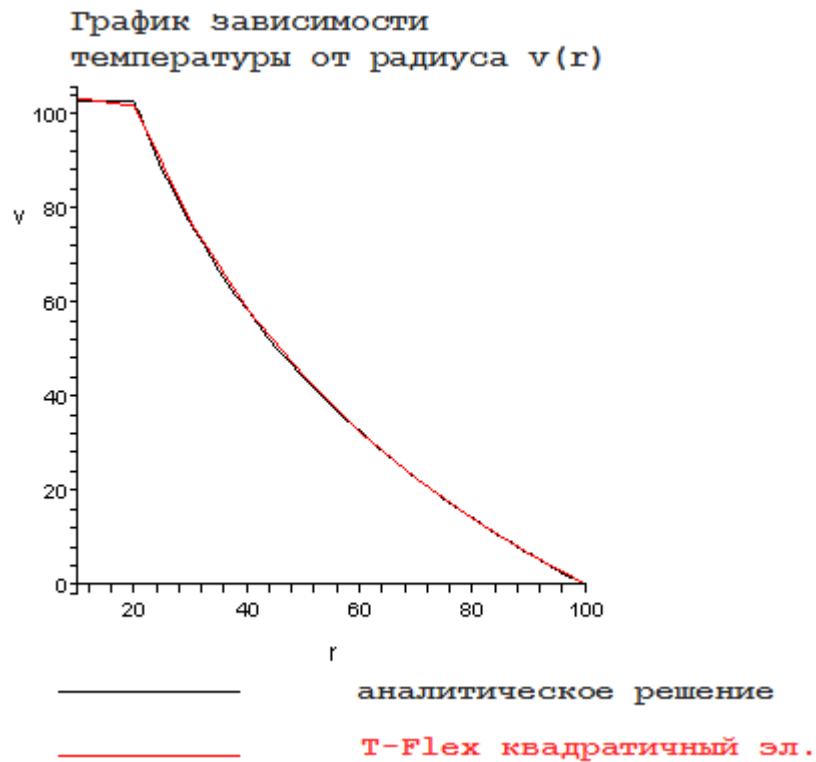


Рисунок 6.5-3-Измерение  $r$  дано в миллиметрах

#### Вывод:

Для данной задачи получили реалистичную картину поля. Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим не превысила 2% при использовании линейного и 0,2% при использовании квадратичного элемента на краю диска.

На графике зависимости температуры от радиуса видно, что аналитическое решение и численное решение практически совпали. Это говорит о том, что распределения температурных максимумов и минимумов одинаковы, следовательно, расчет тепловых потоков и мощности будет производиться так же точно.

Квадратичные элементы оказались точнее линейных, но потребовали в 5.8 раз больше узлов.

Кроме того, заметим, что моделирование точечным источником задачи с распределенным оказалось вполне возможно. Здесь не утверждается, что это возможно всегда. Однако для определенной геометрии тел это так. Например, в нашем случае, распределенный источник тепла обладал центральной симметрией.

#### Мощность точечного источника внутри шара



Рассмотрим задачу нахождения температурного поля внутри изотропного шара, с точечным источником в центре. На сферической поверхности поддерживается постоянная температура.

Радиус сферы, ограничивающей тело,  $R=0.1$  м, температура на поверхности шара  $t=20$  °С. Центр шара совмещен с началом координат. Пусть в центре шара задан точечный источник мощностью  $\rho=500$  Вт. Полагаем его координаты равными  $P_0=(0, 0, 0)$ . Теплопроводность зададим равной  $\lambda=1$  Вт/(м·°С).

Рассмотрим для моделирования 1/8 часть шара. В расчетной модели прикладываемую мощность в 500 Вт, соответственно, разделим на 8, т. е.  $500 / 8 = 62.5$  Вт.

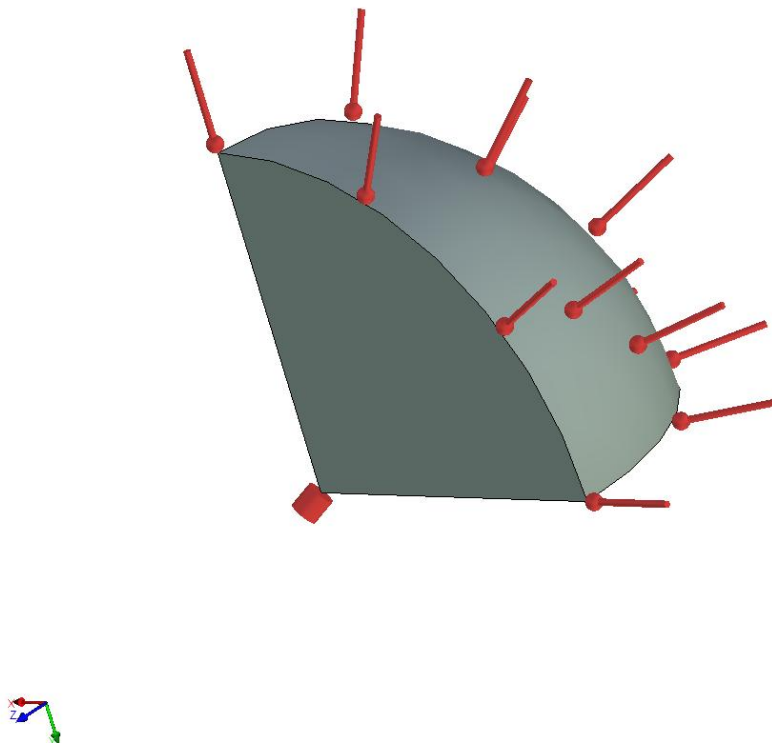


Рисунок 6.6-1 – Расчетная модель с граничными условиями

Для данной задачи существует точное решение в точке  $P=P(x, y, z)^2$ :

---

<sup>2</sup> Данное решение с небольшими изменениями можно найти на странице <http://vicaref.mgsu.ru/PDE/index9.htm>.  
Решение представлено для источника, мощностью 4π.

$$u(P) = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{R}{r_0 \cdot r_1} \right) + t, P_0 \neq 0$$

$$u(P) = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) + t,$$

$$P_0 = P_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$P = P(x, y, z)$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

$$r_1 = \sqrt{\left( x - x_0 \frac{R^2}{r_0^2} \right)^2 + \left( y - y_0 \frac{R^2}{r_0^2} \right)^2 + \left( z - z_0 \frac{R^2}{r_0^2} \right)^2}$$

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

Функция  $u$  является решением дифференциального уравнения вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \cdot \delta(P_0)$$

$$u(P) = t, P \in \partial\Omega$$

Где  $\delta$ -функция Дирака.  $\Omega$  – область нашего сферы,  $\partial\Omega$  – граница этой сферы.

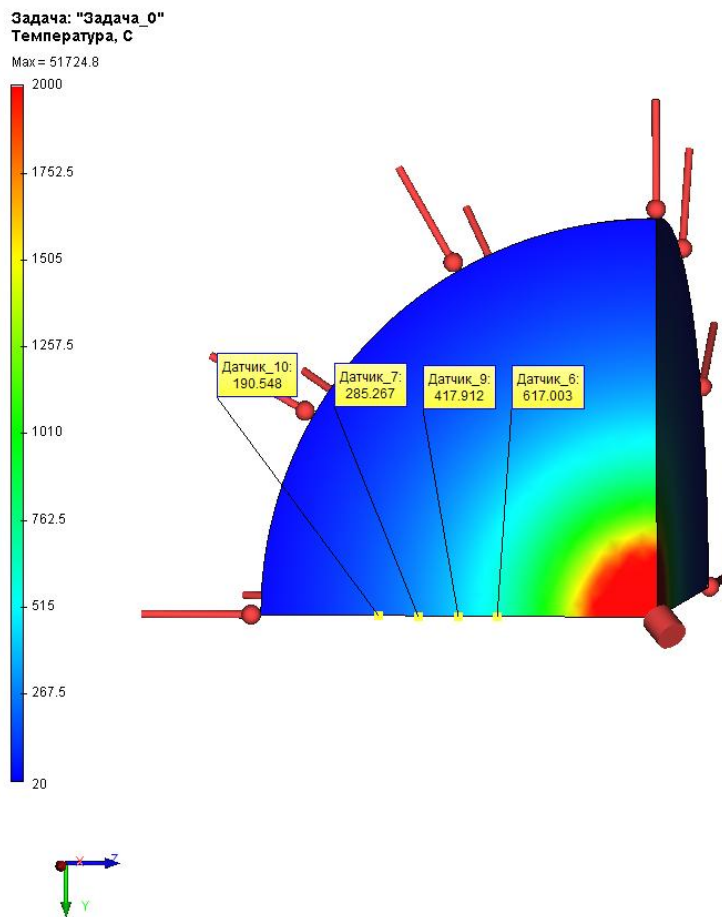
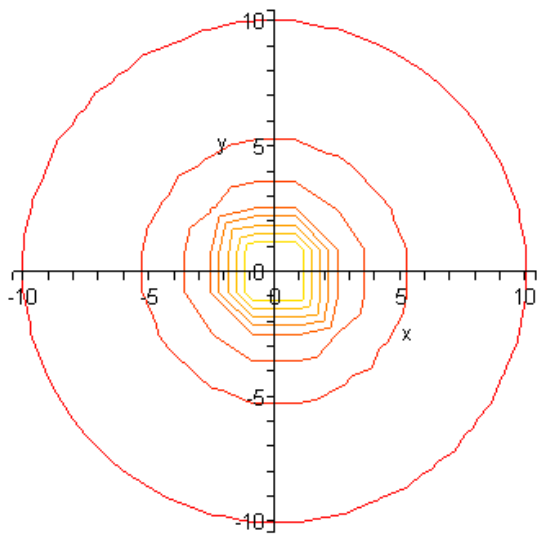


Рисунок 6.6-2 – Температурное поле внутри шара по результатам конечноэлементного анализа



**Рисунок 6.6-3 - Линии равного уровня температурного поля аналитического решения, построенные в системе Maple**

На Рисунок 6.6-2 представлена картина поля, полученная в T-Flex. На Рисунок 6.6-3 видно, что линии равного уровня аналитического решения в диаметральной плоскости сферы качественно не отличаются от тех, что на Рисунок 6.6-2.

Сравним численное решение, полученное в T-Flex анализе, с аналитическим. Аналитическое решение получено с точностью, более 6-ти значащих цифр.

Таблица1  
Параметры пространственной сетки

Тип конечных элементов	Число узлов сетки	Число конечных элементов	Относительный размер
Тетраэдр, 4 узла. Линейный конечный элемент.	5244	23877	0.06
Тетраэдр, 4 узла. Квадратичный конечный элемент.	5244	23877	0.06

Таблица2  
Расчетлинейным элементом  
 $r$  – расстояние от центра сферы до точки измерения

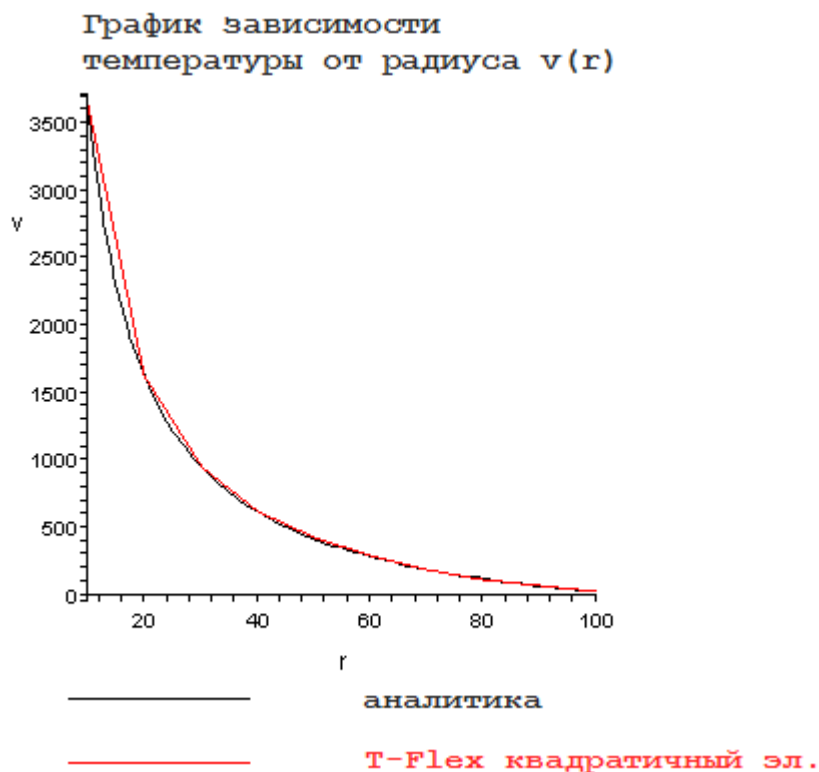
Координата радиуса $r$ , мм	30	40	50	60
-----------------------------	----	----	----	----

Аналитическое решение, °C	948 .40 3	616 .83 1	417 .88 7	285 .25 8
Численное решение, °C	970 .47 9	631 .20 0	424 .34 8	290 .66 2
Относительная погрешность, %	2.3 277 0	2.3 294 8	1.5 461 1	1.8 944 25

**Таблица**  
**Расчет квадратичным элементом**

**3**

Координата радиуса $r$ , мм	30	40	50	60
Аналитическое решение, °C	948 .40 3	616 .83 1	417 .88 7	285 .25 8
Численное решение, °C	948 .41 3	616 .65 3	417 .70 6	285 .07 5
Относительная погрешность, %	0.0 01	0.0 3	0.0 4	0.0 6



**Рисунок 6.6-4 - Измерения по  $r$  в миллиметрах**

**Вывод:**

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим не превысила 2,3% для линейного и 0,4% для квадратичного элементов.

Метод оказался эффективен при решении задач с точечными источниками и сингулярностью решения.

На графике зависимости температуры от радиуса видно, что аналитическое решение и численное решение практически совпали. Это говорит о том, что распределения температурных максимумов и минимумов одинаковы, следовательно, расчет тепловых потоков и мощности будет производиться так же точно.

Квадратичные элементы оказались на порядок точнее линейных, при этом используя в 6.75 раз больше аргументов. Заметим далее, что вблизи от сингулярных источников (сосредоточенных на ребре или в точке), относительная погрешность выше, чем в более далеких от них точках. Это связано с тем, что температура в таких источниках равна бесконечности.

## Температурное поле тепловой системы радиатора и чипа

Рассмотрим систему из радиатора и чипа. Радиатор обладает теплопроводностью  $K_{rad}=390$  Ватт/(м · °C), а чип теплопроводностью  $K_{chip}=50$  Ватт/(м · °C)<sup>3</sup>. Чип является источником тепла мощности  $P=65$  Ватт. По всей поверхности между ними происходит тепловой контакт с тепловым сопротивлением  $R=2 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup> · °C / Ватт. Радиатор отводит тепло с коэффициентом теплоотдачи  $h=3000$  Ватт/(м<sup>2</sup> · °C) во внешнюю среду с температурой  $T_0=20$  °C. Необходимо в установившемся режиме найти распределение тепла в радиаторе и в микросхеме. При этом предполагаем самый худший вариант: тепло отводится только радиатором. Всеми другими возможными потерями тепла мы пренебрегаем. Толщина радиатора  $b=1.5$  мм. Толщина микросхемы равна  $a=1.5$  мм. В пространстве оба элемента предполагаются прямоугольными, с объемами  $V_{rad}=(b-a) \cdot S$  и  $V_{chip} = a \cdot S$  соответственно, где  $S=900 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup> – площадь касания.

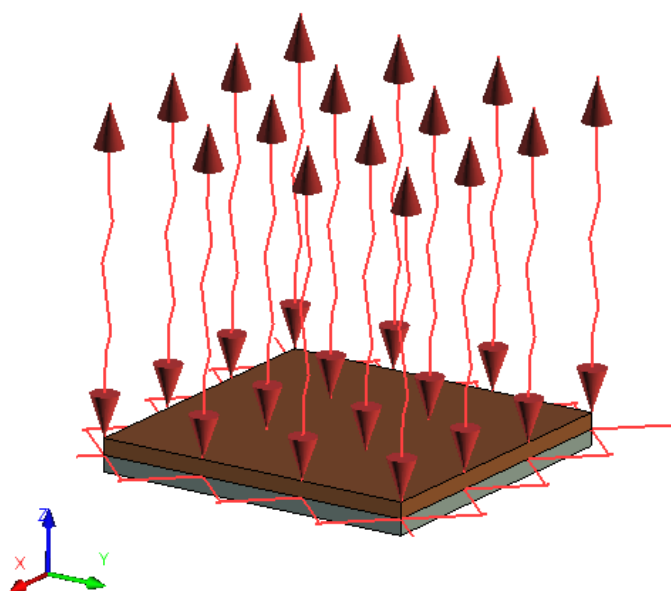


Рисунок 6.7-1 –Расчетная модель с граничными условиями

Рассмотрим изменение поля вдоль толщины системы. Пусть  $z$  – измерение высоты от основания микросхемы, тогда дифференциальное уравнение примет вид:

$$-K(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = p \delta_{chip}(z), 0 < z < b$$

Где  $\delta_{chip}$  – функция источника тепла – микросхемы. В нашем случае, этот источник – отрезок длины  $a$ .  $p$  – распределенная на данном отрезке мощность. Если в объеме  $V_{chip}$  была распределена мощность  $P$ , то на отрезке  $[0, a]$   $p=P/V_{chip}$ .

$K(z)$  – это функция проводимости и определяется следующим образом:

<sup>3</sup> Теплопроводности меди (радиатор) и стали (микросхема). Теплопроводность микросхемы усреднили до материала стали.

$$K(z) = \begin{cases} K_{rad}, z > a, \\ K_{chip}, z < a \end{cases}$$

Для данного уравнения краевые условия имеют вид:

$$\begin{cases} -K_{rad} \frac{\partial u}{\partial z}(b) = h(u(b) - T_0), \\ \frac{\partial u}{\partial z}(0) = 0 \end{cases}$$

Для точечного источника тепла решение для однородного краевого условия будет иметь вид: <sup>4</sup>

$$g(z, z_0) = -\frac{p}{2K(z)} \cdot |z - z_0| - \frac{p}{2K(z)} z - \frac{p}{2K(z)} z_0 + C,$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(0, z_0) = 0, z_0 > 0, z = 0$$

Решение  $u$  для источника тепла имеет вид:

$$u = \int_0^a g(z, z_0) dz_0 = \begin{cases} a \cdot C_{rad} - \frac{p \cdot z \cdot a}{K_{rad}}, z > a, z \leq b, \\ a \cdot C_{chip} - \frac{pz^2}{2K_{chip}} - \frac{pa^2}{2K_{chip}}, z \leq a, z \geq 0 \end{cases}$$

Константы  $C_{rad}$  и  $C_{chip}$  определяются из следующих условий:

$$\begin{cases} C_{chip} = C_{rad} - R \cdot p - p \cdot a \left( \frac{1}{K_{rad}} - \frac{1}{K_{chip}} \right) \\ C_{rad} = \frac{1}{a} \left( \frac{Pa}{h} + \frac{Pa^2}{K_{rad}} + T_0 \right) \end{cases}$$

Пусть вдоль толщины мы расположили датчики температуры, в трехмерной модели они расположены вдоль толщины пластины. Сравним в заданных точках численное решение, полученное в T-Flex, с аналитическим.

Аналитическое решение данной задачи посчитано точно (более 6 значащих цифр).

<sup>4</sup> Решение получено на базе функции Грина. Ее вид изложен в книге Иванченко Д. Соколова А. Классическая теория поля Москва 1951 Ленинград. с. 39



Таблица

Параметры пространственной сетки

1

Тип конечных элементов	Число узлов сетки при расчете	Число элементов сетки	Относительный размер
Тетраэдр, 4 узла. Линейный конечный элемент.	5957	3518	0.08
Тетраэдр, 6 узлов. Квадратичный конечный элемент.	1030	3125	0.08

Таблица

Расчет

квадратичным

элементом

2

z – высота от основания чипа в мм

Координата точки z, мм	0	0.7 5	2.2 5	3
Аналитическое решение, °C	59. 879 6	59. 608 8	44. 212 96	44. 074 07
Численное решение, °C	59. 879 6	59. 608 8	44. 212 97	44. 074 09
Относительная погрешность, %	3.3 4E- 05	1.6 8E- 05	2.2 6E- 05	6.8 1E- 05

Таблица

Расчет линейным элементом

3

Координата точки z, мм	0	0.7 5	2.2 5	3
Аналитическое решение, °C	59. 879 6	59. 608 7	44. 212 9	44. 074 0
Численное решение, °C	59. 729 5	59. 381 1	44. 208 6	44. 070 2
Относительная погрешность, %	0.2 5	0.3 8	0.0 097	0.0 086

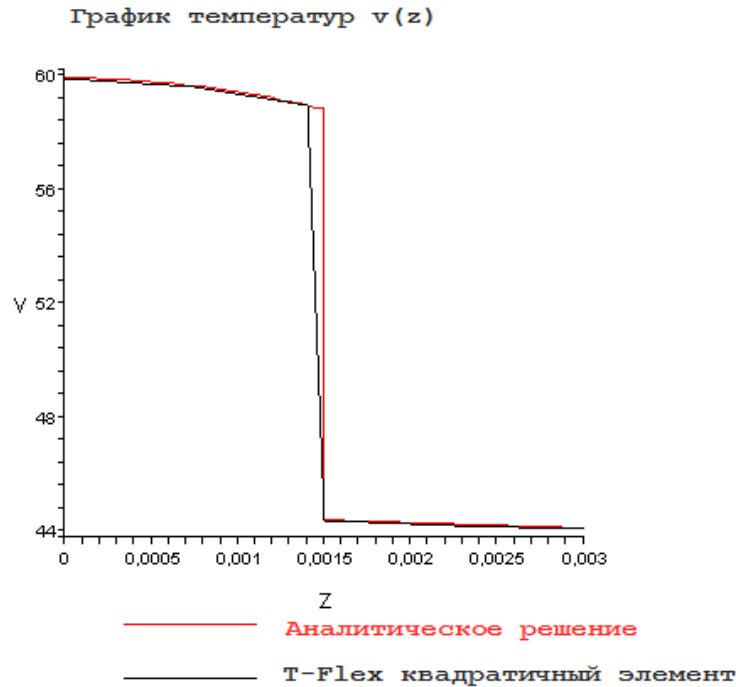


Рисунок 6.7-2 Измерения по  $z$  на графике в метрах, температура в  $^{\circ}\text{C}$ .

Дополнительно проверим величину теплового потока на границе материалов чипа и радиатора, а так же на верхней границе, отдающей тепло. Критически важным моментом для нас является тот факт, что тепловой поток, в отличие от температуры, является непрерывной функцией. Выражение для теплового потока показано ниже:

$$F = \begin{cases} -K_{rad} \frac{\partial u}{\partial z}, z > a, z \leq b, \\ -K_{chip} \frac{\partial u}{\partial z}, z \leq a, z \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} p \cdot a, z > a, z \leq b, \\ p \cdot z, z \leq a, z > 0 \end{cases}$$

Как видно из аналитического выражения для потока: внутри тела радиатора (к которому приложена тепловая мощность) тепловой поток равен постоянной величине. На границе  $pa = pz$ , при  $z=a$ , следовательно, непрерывность теплового потока выполнена.



Рисунок 6.7-3 – Зависимость потока от высоты, м

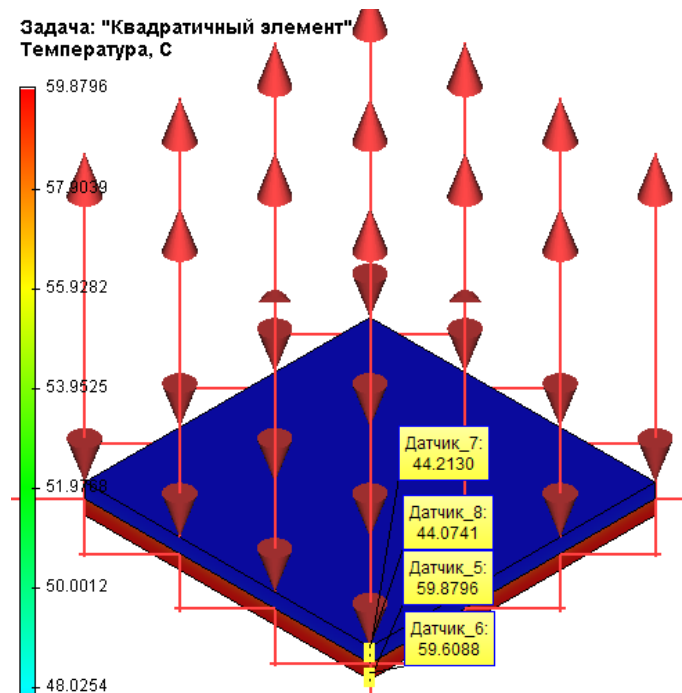


Рисунок 6.7-4 – Результаты расчета квадратичным элементом

Таблица  
Расчет потока тепла  $F$  линейным элементом

4

Координата точки $z$ , мм	0.75	2.25	3
Аналитическое решение, $\text{Ватт/м}^2$	36111.(1)*	72222.(2)	72222.(2)
Численное решение, $\text{Ватт/м}^2$	3.774E+4	7.167E+4	7.208E+4
Относительная погрешность, %	4.5	0.8	0.19

Таблица  
Расчет потока тепла  $F$  квадратичным элементом

5

Координата точки $z$ , мм	0.75	2.25	3
Аналитическое решение, $\text{Ватт/м}^2$	36111.(1)	72222.(2)	72222.(2)
Численное решение, $\text{Ватт/м}^2$	3.6111E+4	7.2222E+4	7.2222E+4
Относительная погрешность, %	$<10^{-5}$	$<10^{-4}$	$<10^{-4}$

\*Цифра в скобках означает период десятичной дроби, например  $72222.(2)=72222.2222(2)$ .

**Вывод:**

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим не превышает 5% для линейного и  $10^{-4}$  для квадратичного элементов.

Данная задача решилась очень точно, по той причине, что решение представило собой кусочную функцию с линейной и квадратичной частями.

Как видно на рисунке 2, график расчета квадратичным элементом совпал с графиком аналитического решения. Расхождение с аналитическим решением расчета линейным элементом оказалось значительно выше, по сравнению с расчетом квадратичным элементом. Это связано с тем, что само решение представляет собой квадратичную функцию температуры, следовательно, решается квадратичными элементами точно.

### **Ортотропная графитовая пластина при установившемся температурном режиме.**

Рассмотрим задачу распределения теплового поля в установившемся режиме для пластины с ортотропными кристаллическими свойствами теплопроводности ее материала, одно из ребер которой имеет постоянную температуру  $T_1$ , а остальные  $T_2$ .

В качестве примера приведем тонкую прямоугольную пластину графита с теплопроводностью  $K_1=278$  Вт/(м · °С) вдоль базового направления и  $K_2=139$  Вт/(м · °С) в перпендикулярном. Ее размеры: 200мм x 100мм. Параметры  $a=200$ мм,  $b=100$ мм. Пластина вытянута вдоль базового направления. К одному из её ребер меньшей длины приложим температуру  $t=80$  °С. В установившемся режиме она постоянна и не зависит от времени. Ко всем остальным ребрам приложена температура 0 °С. Вдоль всей поверхности (с обеих сторон) происходит теплообмен с внешней средой, температура которой 0 °С, коэффициент теплообмена  $H=400$  Вт/(м<sup>2</sup> · °С). Толщина пластины  $D=2$ мм.

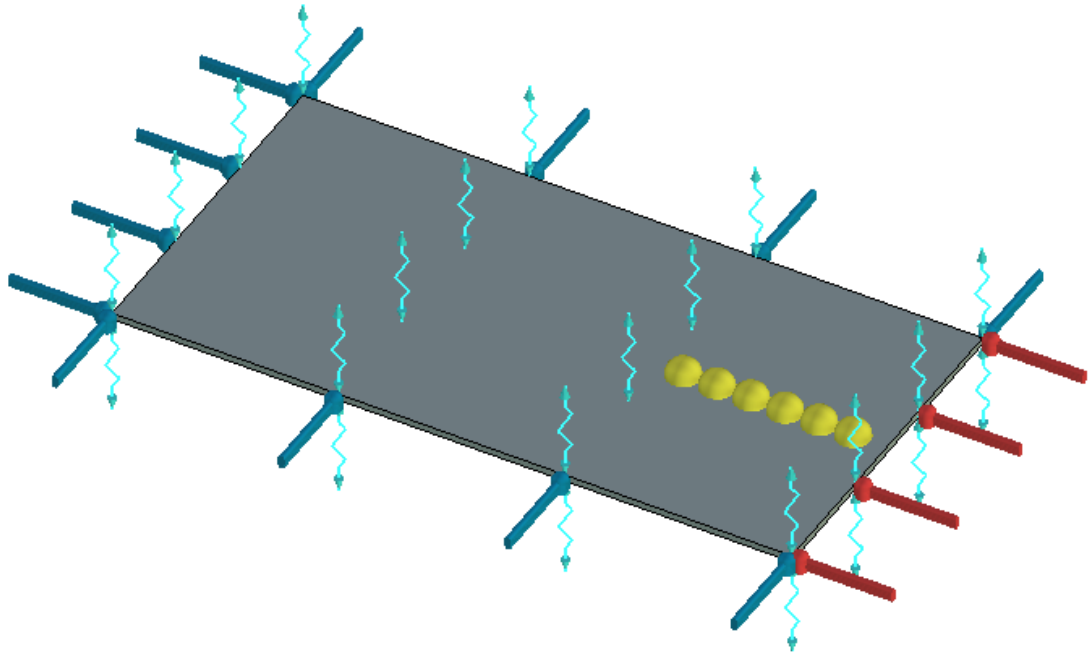


Рисунок 6.8-1 – Расчетная модель с граничными условиями и датчиками

Для данной задачи дифференциальное уравнение имеет вид:

$$K_1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2H}{D} u = 0$$

$$u(0, y) = 0$$

$$u(a, y) = 0$$

$$u(x, 0) = t$$

$$u(b, y) = 0$$

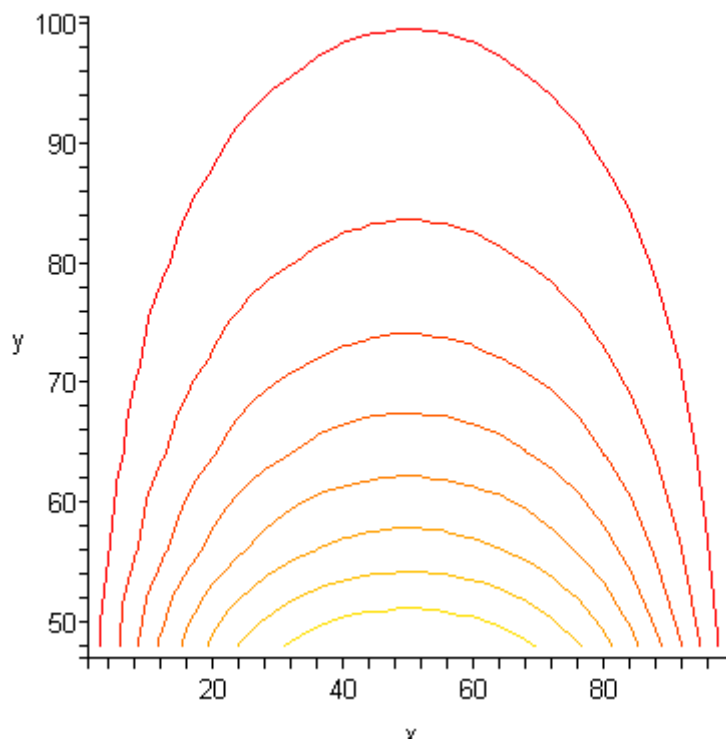
Данная задача решается в координатной плоскости OXY, в прямоугольнике  $[0, a] \times [0, b]$ , ассоциированном с графитовой пластиной.

Аналитическое решение задачи выражается в виде ряда Фурье и имеет вид<sup>5</sup>:

$$u(x, y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi\xi/a) \cdot \operatorname{sh}\left((b-\xi)\sqrt{k^2 + n^2\pi^2/a^2}\right)}{\operatorname{sh}\left(b\sqrt{k^2 + n^2\pi^2/a^2}\right)} \int_0^a t \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

Линии равного уровня для полученного решения имеют вид (система Maple 9.5):

<sup>5</sup> Источник: Г. Карслоу, Д. Еггер «Теплопроводность твердых тел», Изд. «Наука», М. 1964г. с 171.



**Рисунок 6.8-2 – Линии равного уровня (по расчету в Maple)**

Такую же картину поля наблюдаем и в T-FLEX, смотри Рисунок 6.8-3.

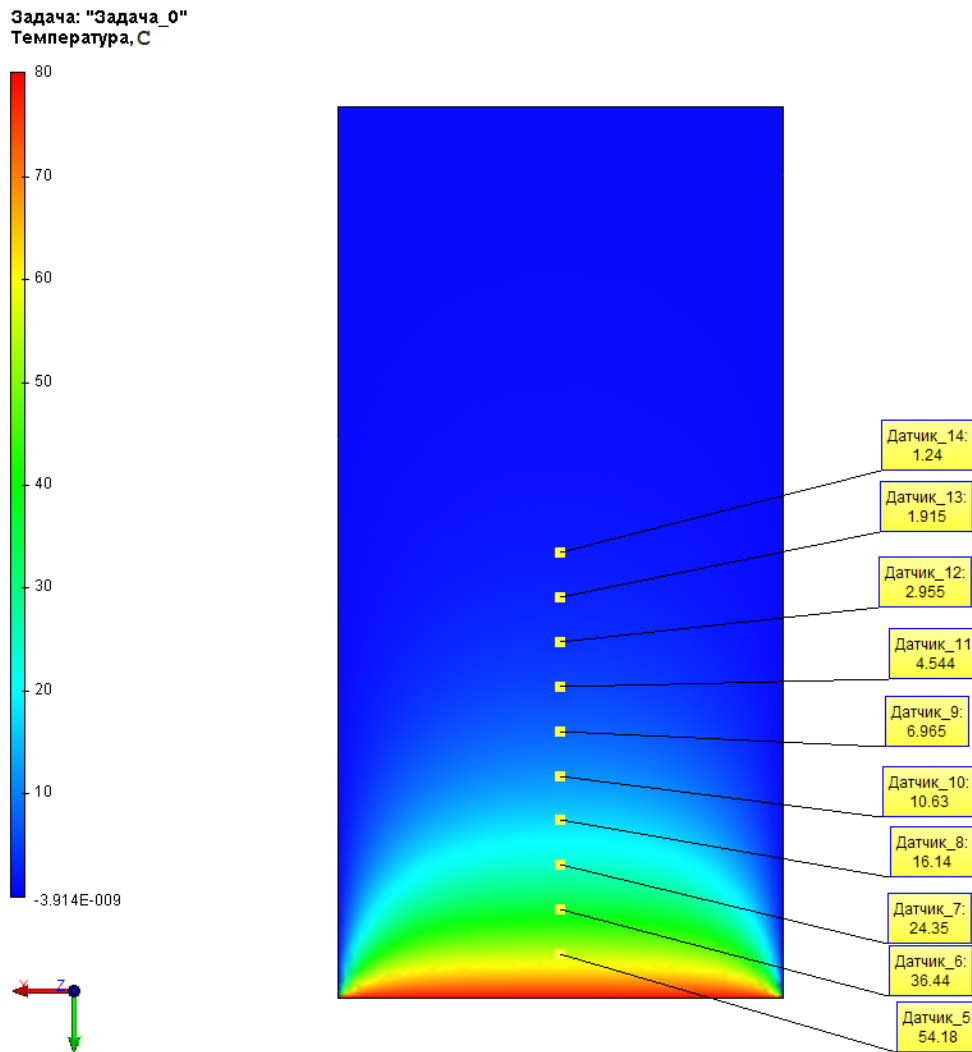


Рисунок 6.8-3 – Линии равного уровня (по расчету в T-FLEX анализ)

Как показано на рисунке расположим датчики температур и построим по ним график  $x=50$  мм.  $y=10,20,30,\dots,60$  мм. Сравним график по этим точкам с аналитикой.



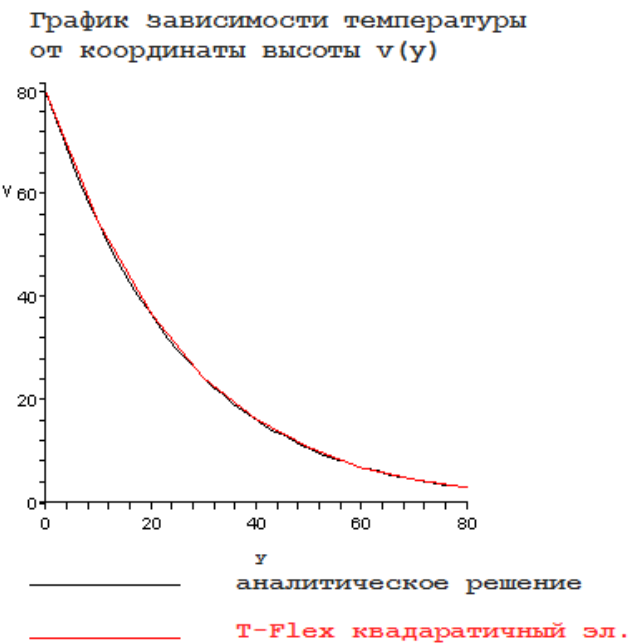


Рисунок 6.8-4 - Измерения по  $y$  в миллиметрах

Оценим теперь расхождение численно. Аналитическое решение получено с точностью 6 знаков.

Таблица

Параметры пространственной сетки

1

Тип конечных элементов	Число узлов сетки при расчете	Число элементов сетки	Относительный размер
Тетраэдр, 4 узла. Линейный конечный элемент.	613	1756	0.05
Тетраэдр, 6 узла. Квадратичный конечный элемент.	3591	1756	0.05

Таблица

Расчет

квадратичным

2

элементом

$y$  – высота пластины от стороны с приложенной температурой,  $x=50$  мм.

Координата точки $y$ , мм	10	20	30	40
Аналитическое решение, $^{\circ}\text{C}$	54. 192 9	36. 459 3	24. 345 2	16. 138 2

Численное решение, °C	54. 073	36. 390 1	24. 310 1	16. 126 2
Относительная погрешность, %	0.2 212 46	0.1 898 00	0.1 441 76	0.0 743 58

**Таблица**  
**Расчет линейным элементом**

3

Координата точки y, мм	10	20	30	40
Аналитическое решение, °C	54. 192 9	36. 459 3	24. 345 2	16. 138 2
Численное решение, °C	54. 621 1	36. 599 4	24. 263 1	16. 160 0
Относительная погрешность, %	0.7 901 40	0.3 842 64	0.3 372 32	0.1 350 83

Отметим, что ближе к границе точки выбирать не надо (8-10 мм допустимо в при 200 слагаемых), т. к. в них ряд Фурье сходится с большими осцилляциями. Для этого надо увеличивать число слагаемых частичной суммы ряда.

Для визуализации эффекта ортотропности в T-Flex изменим коэффициент теплопроводности по оси ОХ  $K_2=70 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}$ . Картина поля имеет вид:

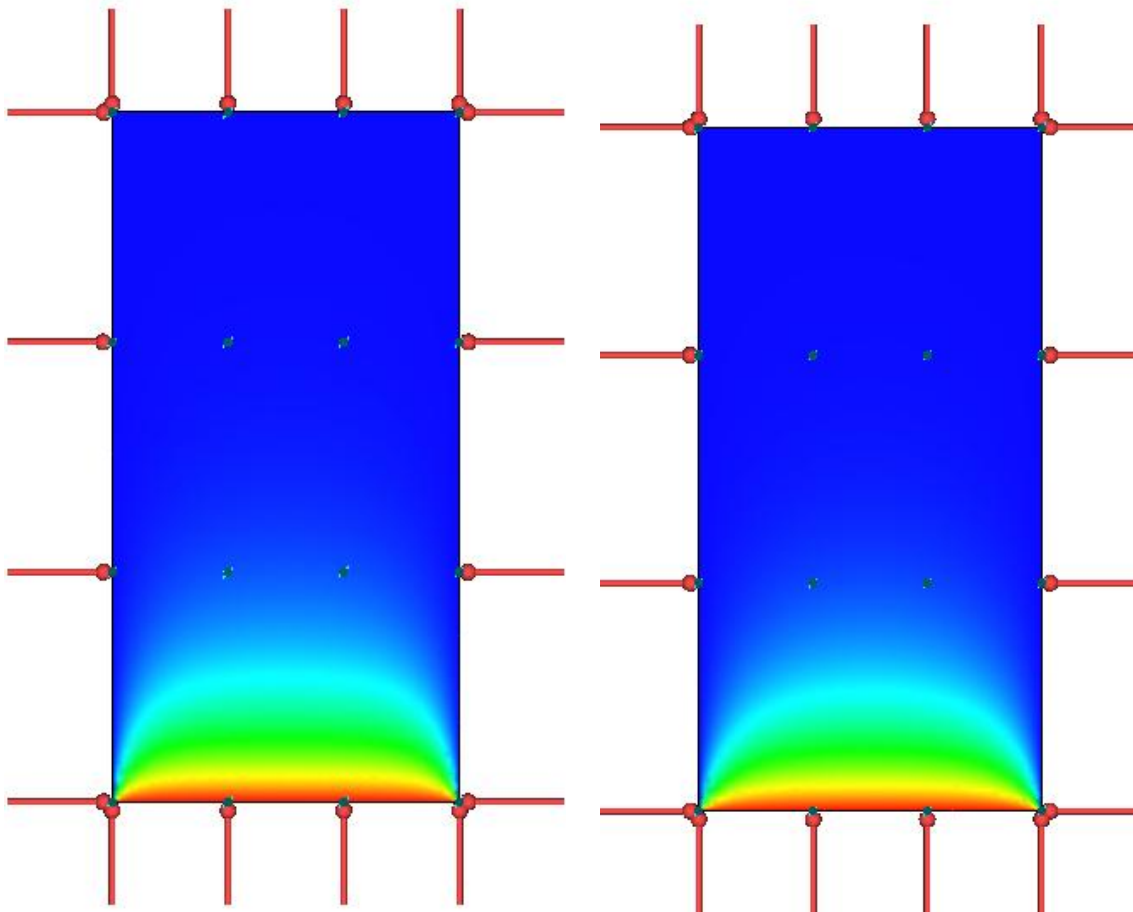


Рисунок 6.8-5 -  $K_2=70 \text{ Вт/(м} \cdot ^\circ\text{C)}$  слева и  $K_2=139 \text{ Вт/(м} \cdot ^\circ\text{C)}$  справа

Как видно на Рисунок 6.8-5, изотерма слева при уменьшении теплопроводности по оси OX стала менее полой.

**Вывод:**

Метод оказался эффективен при решении задач с анизотропным распределением температур. Ортотропность свойств практически не повлияла на вычислительную эффективность метода.

На графике зависимости температуры от радиуса видно, что аналитическое решение и численное решение практически совпали. Это говорит о том, что распределения температурных максимумов и минимумов одинаковы, следовательно, расчет тепловых потоков и мощности будет производиться так же точно.

Относительная погрешность линейных элементов в среднем в два раза оказалась больше квадратичных. Однако квадратичный элемент использовал количество узлов, превосходящее количество узлов линейного элемента более чем в 5 раз.

**Температурное поле системы двух цилиндрических вложенных тел с тепловым сопротивлением поверхности касания**

Рассмотрим задачу определения температурного поля системы двух цилиндрических вложенных тел с тепловым сопротивлением по границе контакта. Радиус внутреннего тела равен  $r_2=5\text{см}$ , а радиус внешнего тела  $r_1=7\text{см}$ . Оба цилиндра находятся на одном уровне и обладают высотой равной  $D=7\text{ см}$ . На круглых поверхностях данных тел задан нулевой тепловой поток. На боковой поверхности внешнего цилиндра задан теплообмен с окружающей средой с коэффициентом  $H=120\text{ Ватт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  и температурой окружающей среды  $T_0=20^\circ\text{C}$ . Вдоль центрального отрезка цилиндра по всей высоте задана тепловая мощность  $P=200\text{ Ватт}$ . На поверхности касания двух цилиндров задано тепловое сопротивление величиной  $R=0.01^\circ\text{C}\cdot\text{м}^2/\text{Ватт}$ . Теплопроводность внутреннего цилиндра равна  $K_2=50\text{ Ватт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$ , внешнего  $K_1=50\text{ Ватт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$ <sup>6</sup>.

Рассмотрим  $1/4$  часть всей цилиндрической системы тел. Условием симметрии будет нулевой тепловой поток на квадратных границах конструкции. Мощность на центральном отрезке при этом разделится на 4 (распределится между двумя телами).  $P_{1/4}=50\text{ Ватт} = P/4$ . Пример такого построения показан ниже.

---

<sup>6</sup> Здесь намеренно  $K_1$  и  $K_2$  были выбраны равными, чтобы показать влияние на скачок температуры на границе только лишь величины теплового сопротивления, а не изменения теплопроводностей. Однако аналитическое решение ниже учитывает случай, когда теплопроводности материалов не равны.

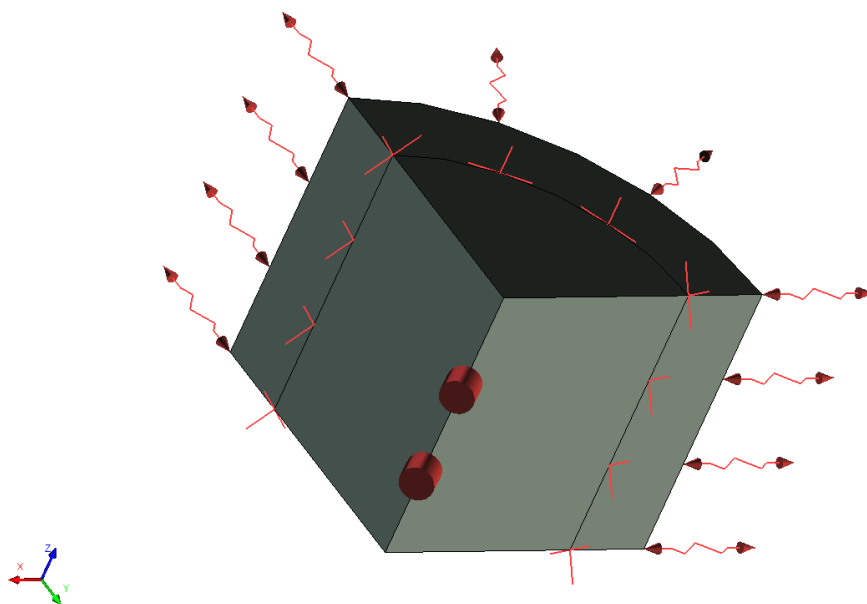


Рисунок 6.9-1 – Расчетная модель с граничными условиями

Решаемое дифференциальное уравнение для точечного источника имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} K(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} K(x, y) \right) = \rho \cdot \delta(x, y)$$

Где  $\rho$  – плотность распределенной мощности. Для нашего случая:  $\rho = P / D$ .  $K$  – это функция теплопроводности материала цилиндров.  $K(x, y) = K_1$  если точка  $(x, y)$  принадлежит внешнему цилиндру,  $K(x, y) = K_2$  если точка принадлежит внутреннему цилиндру.  $\delta$  – это функция источника (в литературе функция Дирака). Решением данного уравнения является функция Грина  $G$  (функция источника). Уравнение представлено в координатах  $(x, y)$ . На самом же деле, решение будет зависеть только от одной переменной – цилиндрического радиуса (расстояния от отрезка с приложенной мощностью), и будет иметь вид <sup>7</sup>:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} K(r) \right) = \rho \cdot \delta(r),$$

$$K(r) = \begin{cases} K_1, & r_2 < r \leq r_1 \\ K_2, & 0 \leq r \leq r_2 \end{cases}$$

<sup>7</sup> Тихонов А. Н. Самарский А. А. Уравнения математической физики. С 282 – получен вид дифференциального уравнения

Граничное условие этой задачи задает конвективный теплообмен

$$-K_1 \frac{\partial u}{\partial r}(r_1) = H(u(r_1) - T_0)$$

Решение задачи имеет вид <sup>8</sup>:

$$u(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\pi K_2} \ln|r| + C_2, & 0 \leq r \leq r_2 \\ \frac{\rho}{2\pi K_1} \ln|r| + C_1, & r_2 < r \leq r_1 \end{cases}$$

Где постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из условия температурного скачка на границе раздела двух тел и граничного условия. Выражения, определяющие  $C_1$  и  $C_2$  имеют вид:

$$C_1 = \frac{1}{H} \left( \frac{\rho}{2\pi r_1} + H \cdot T_0 + H\rho \frac{\ln(r_1)}{2\pi K_1} \right)$$

$$C_2 = C_1 + R \frac{\rho}{2\pi r_2} + \frac{\rho \ln(r_2)}{2\pi} \left( \frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_1} \right)$$

Условие температурного скачка имеет вид:

$$R = \frac{\left| \lim_{r \rightarrow r_2+} u(r) - \lim_{r \rightarrow r_2-} u(r) \right|}{F} = \frac{|u(r_2+) - u(r_2-)|}{F}$$

Где  $F$  – тепловой поток на границе, выражается формулой

$$F = \lim_{r \rightarrow r_2-} -\frac{\partial u}{\partial r} K_2 = \lim_{r \rightarrow r_2+} -\frac{\partial u}{\partial r} K_1$$

Сравним решение T-Flex анализа с аналитическим решением задачи.

Параметры пространственной сетки

Тип конечных элементов	Число узлов сетки при расчете	Число элементов сетки	Относительный размер
Тетраэдр, 4 узла. Линейный конечный элемент.	2730	12060	0.09
Тетраэдр, 6 узлов. Квадратичный конечный элемент.	18520	12427	0.09

Расчет линейным элементом

Координата точки $r =  x  \sqrt{2}$ ,	28.	42.	56.
---------------------------------------	-----	-----	-----

<sup>8</sup> Тихонов А. Н. Самарский А. А. Уравнения математической физики. С 283 – получен вид общего решения

мм	284 27	426 40	568 54
Координата $x=y$ точки в плоскости цилиндра.	20	30	40
Аналитическое решение, °C	173 .32 14	169 .63 38	76. 071 86
Численное решение, °C	173 .42 8	169 .71 2	76. 099 5
Относительная погрешность, %	0.0 615 04	0.0 460 99	0.0 363 34

Расчет квадратичным элементом

Координата точки $r =  x \sqrt{2}$ , мм	28. 284 27	42. 426 40	56. 568 54
Координата $x=y$ точки в плоскости цилиндра.	20	30	40
Аналитическое решение, °C	173 .32 14	169 .63 38	76. 071 86
Численное решение, °C	173 .36 3	169 .67 7	76. 071 6
Относительная погрешность, %	0.0 240 02	0.0 254 67	0.0 003 42

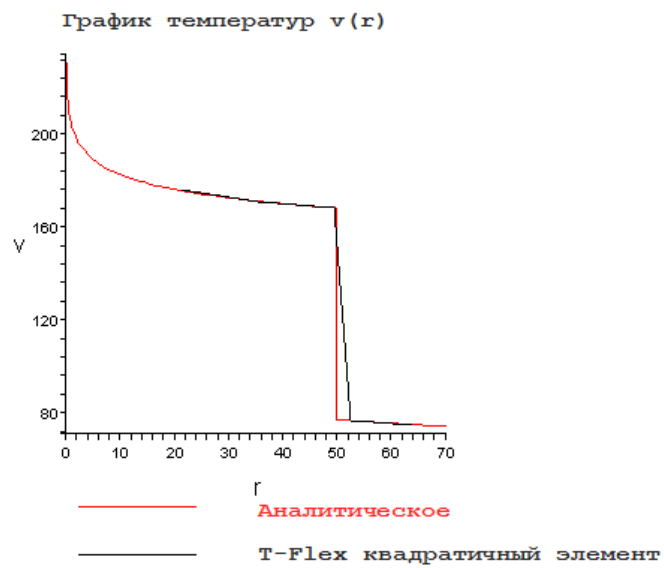


Рисунок 6.9-2 - Измерения на осях:  $r$  в миллиметрах,  $v$  в  $^{\circ}\text{C}$



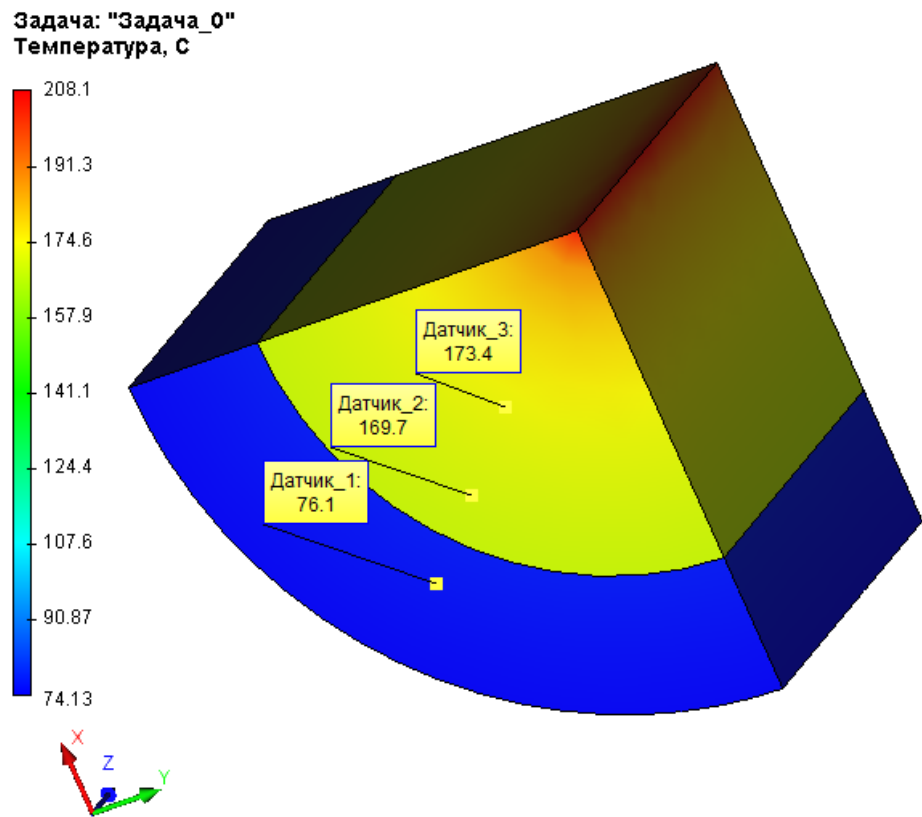


Рисунок 6.9-3 - Картина поля

Заметим, что в отличие от температуры, тепловой поток не терпит разрыв на границе материалов, т. е. является непрерывной функцией пространства. Вычислим его:

$$F = -K \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2\pi r}$$

Теперь проверим вычисление потока тепла в T-Flex анализе.

Таблица

Расчет линейным элементом

1

Координата точки $r =  x \sqrt{2}$ , мм	28.28427	42. 426 40	56.56854
Координата $x=y$ точки в плоскости цилиндра.	20	30	40

Аналитическое решение, Ватт/м <sup>2</sup>	16077.0	107 18. 1	8038.53
Численное решение, Ватт/м <sup>2</sup>	16351.6	107 91. 9	8057.86
Относительная погрешность, %	1.70803	0.6 885 54	0.240466

**Таблица**  
**Расчет квадратичным элементом**

2

Координата точки $r =  x \sqrt{2}$ , мм	28.28427	42. 426 40	56.568 54
Координата $x=y$ точки в плоскости цилиндра.	20	30	40
Аналитическое решение, Ватт/м <sup>2</sup>	16077.0	107 18. 1	8038.5 3
Численное решение, Ватт/м <sup>2</sup>	16117.4	107 33. 0	8048.1 9
Относительная погрешность, %	0.251290	0.1 390 17	0.1201 71

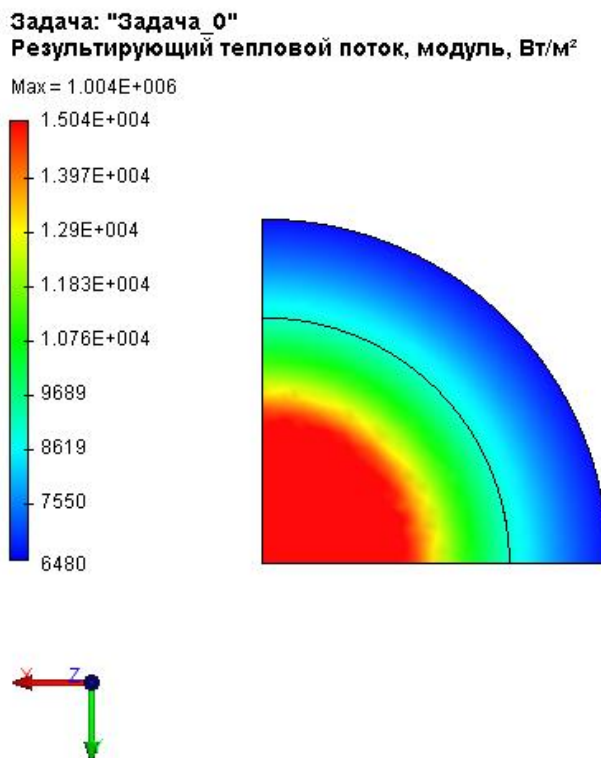


Рисунок 6.9-4 - Картина теплового потока

#### Вывод:

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим не превысила 1,7% для линейного и 0,25 для квадратичного элементов.

Подтвердилась непрерывность теплового потока, физически важная для тепловых систем.

В достаточной близости от сосредоточенного источника (точка или отрезок) тепловой мощности погрешности линейного и квадратичного элемента существенно не отличаются. Это связано с тем, что температура в таких источниках равна бесконечности. На определенном расстоянии от них квадратичные элементы показывают себя на порядок лучше линейных по точности расчета.

Хотя значение бесконечной температуры не вписывается в естественную физическую модель, тем не менее, позволяет исследовать самые различные источники тепла, например, от тонких проводов или достаточно удаленных объектов от интересующей области.

## Поток и конвекция для изотропной пластины

Пусть имеется стальная пластина  $b=200\text{мм}$  X  $a=100\text{ мм}$  толщиной  $D=5\text{ мм}$  с теплопроводностью  $K=50\text{ Вт}/(\text{м}^0\text{C})$ . Покажем, что тепловая стационарная задача может быть вполне решаемой и для случая, когда на границе нет постоянно поддерживаемой температуры (которую при моделировании надо знать заранее). Ограничимся двумя типами нагрузок: тепловой поток (равный нулю для некоторых границ) и конвективный теплообмен. По поверхности пластины (с двух сторон) задан теплообмен с внешней средой с коэффициентом теплоотдачи  $C=40\text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^0\text{C})$  и температурой внешней среды равной нулю. По четвертой грани (длиной  $100\text{мм}$ ) задан конвективный теплообмен с коэффициентом  $H=20\text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^0\text{C})$  и температурой внешней среды  $t_0=10^0\text{C}$ .

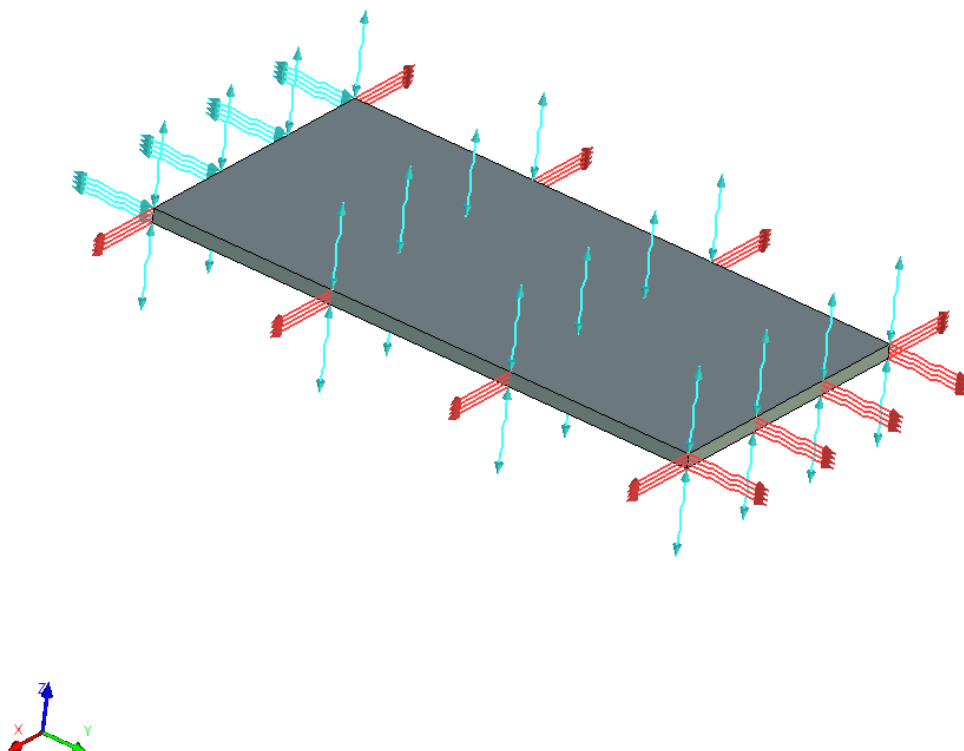


Рисунок 6.10-1 – Расчетная модель с граничными условиями

Совместим начало координат с углом пластины, ось  $OY$  направим вдоль большей стороны пластины, конвекция тогда приложена к грани  $y=b$ . Тогда получим что две из трех граней, на которых задан нулевой тепловой поток, соответствуют значениям  $x=0$  и  $x=a$ . Это означает, что полученное нами решение не должно зависеть от координаты  $x$ . Решение будет иметь вид:

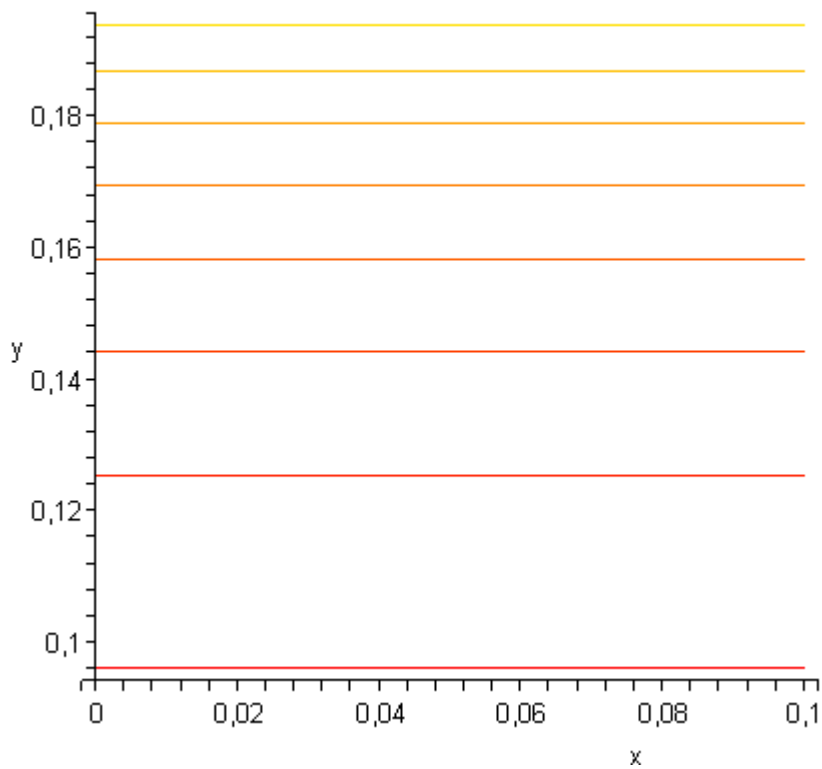
$$u(x, y) = V \cdot (e^{y\sqrt{L}} + e^{-y\sqrt{L}}),$$

$$L = \frac{C}{K \cdot D},$$

$$V = \frac{u_0}{\left(e^{b\sqrt{L}} - e^{-b\sqrt{L}}\right) - \frac{K}{H} \cdot \sqrt{L} \left(e^{b\sqrt{L}} + e^{-b\sqrt{L}}\right)}$$

Линии равного уровня для полученного решение полученные в системе Maple см. ниже.

Конвекция приложена для координаты Y=b.



**Рисунок 6.10-2 - Линии равного уровня решения в системе Maple. Конвекция приложена к  $y=b$ . При  $y=0$  тепловой поток нулевой**

Сравните с картиной поля в T-Flex, представленной на Рисунок 6.10-4.

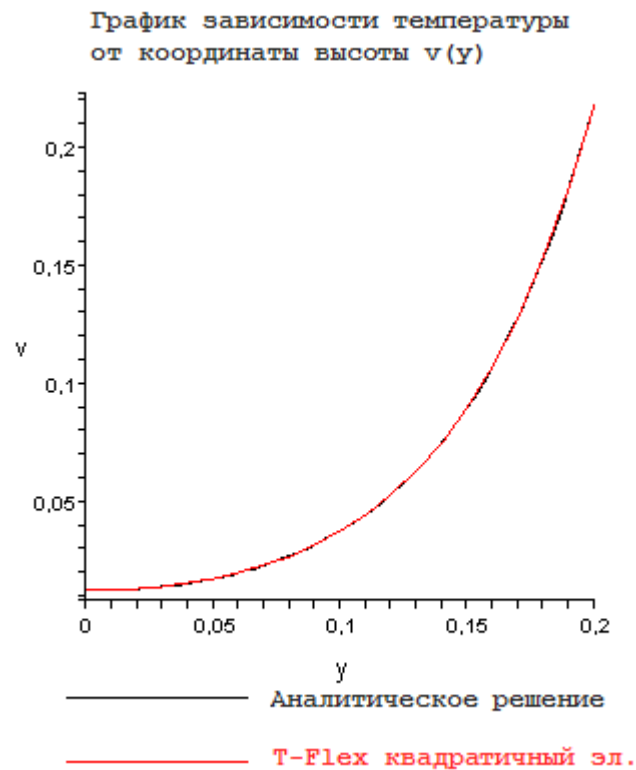


Рисунок 6.10-3 - Измерения по оси  $y$  в метрах

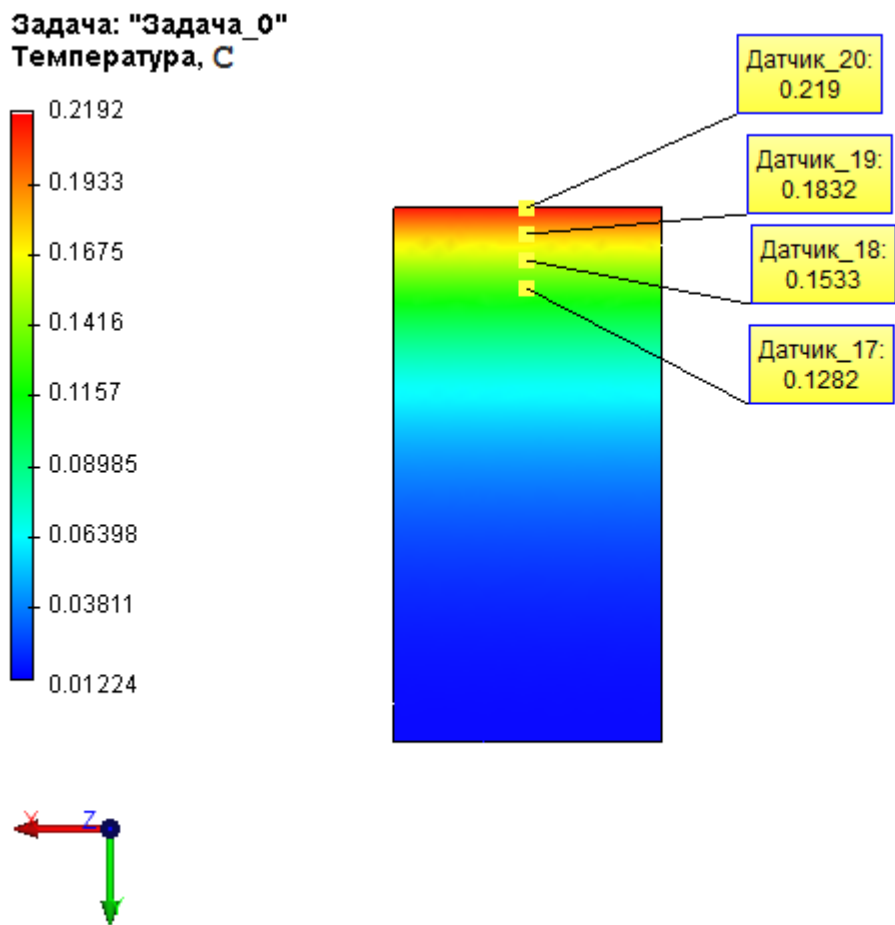


Рисунок 6.10-4 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (перемещения)

Сравним численное решение и полученное в системе T-Flex.

**Таблица**

**Параметры пространственной сетки**

1

Тип конечных элементов	Число узлов сетки при расчете	Число элементов сетки	Относительный размер
Тетраэдр, 4 узла. Линейный конечный элемент.	742	1972	0.05
Тетраэдр, 6 узла. Квадратичный конечный элемент.	4195	1972	0.05

Таблица

Расчет

квадратичным

2  
элементом

у – высота пластины от стороны с приложенной температурой

Координата точки у, мм	200	190	180	170
Аналитическое решение, °C	0.2	0.1	0.1	0.1
	190	832	532	282
	50	31	92	71
Численное решение, °C	0.2	0.1	0.1	0.1
	189	831	532	282
	79	86	65	48
Относительная погрешность, %	0.0	0.0	0.0	0.0
	324	245	176	179
	12	59	13	31

Таблица

Расчет линейным элементом

3

Координата точки у, мм	200	190	180	170
Аналитическое решение, °C	0.2	0.1	0.1	0.1
	190	832	532	282
	50	31	92	71
Численное решение, °C	0.2	0.1	0.1	0.1
	187	834	534	282
	85	06	06	54
Относительная погрешность, %	0.1	0.0	0.0	0.0
	209	955	743	132
	76	07	67	53

#### Вывод:

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим не превысила 0,12% для линейного и 0,03% для квадратичного элементов. Т.е. для данной задачи получили приближение до 3-х значащих цифр. Задача решилась практически точно с небольшими вычислительными затратами.

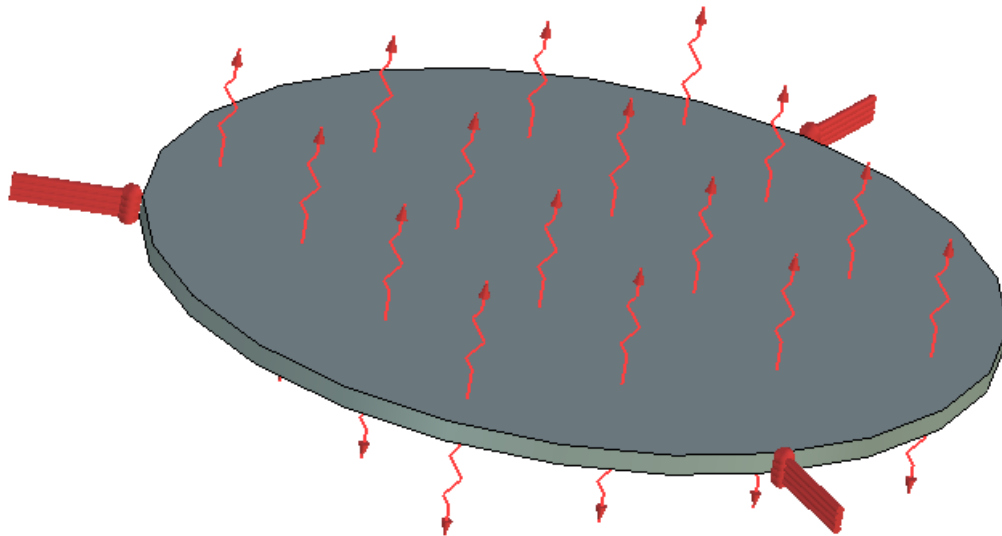
Квадратичные элементы показали относительную погрешность в два раза меньшую, чем линейные элементы, однако использовали почти в 5.8 раза больше узлов.

#### Тепловой поток в изотропном диске

Рассмотрим задачу нагревания круглой пластины распределенными источниками тепла по ее поверхности. Для этого зададим тепловой поток с обеих ее сторон. По краям вокруг пластины будем поддерживать постоянную температуру.



В качестве примера приведем тонкую стальную пластину с теплопроводностью  $K=75 \text{ Вт/(м} \cdot ^\circ\text{C)}$ . Её радиус:  $R=100 \text{ мм}$ . толщина  $D=5 \text{ мм}$ . Значение плотности теплового потока  $F=60 \text{ Вт/м}^2$ . Температура по граням вокруг пластины  $T=20^\circ\text{C}$ .



**Рисунок 6.11-1 – Расчетная модель с граничными условиями**

На рисунке 1 представлена модель такого диска в T-Flex. На поверхности от центра диска на расстоянии  $r=0, 10, 20, \dots, 60 \text{ мм}$  установим датчики температуры и сравним результаты.

Решаемое уравнение на поверхности диска имеет вид<sup>9</sup>:

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) K = \frac{2F}{D}$$

В правой части уравнения объемная плотность источника тепла (эквивалентная поверхностной для плоской задачи).

Краевые условия:

---

<sup>9</sup> Уравнение Пуассона

$$u(P) = T, P \in \partial\Omega \setminus (U_+ \cup U_-)$$

$$K \frac{\partial u}{\partial z}(P) = F, P \in U_+$$

$$K \frac{\partial u}{\partial z}(P) = -F, P \in U_-$$

Где  $U_-$  и  $U_+$  - это соответственно нижняя и верхняя стороны пластины. Аналитическое решение выражается через функцию источника<sup>10</sup>  $G(P, P_0)$ .

$$G(P, P_0) = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \left( \frac{1}{r} \right) - \ln \left( \frac{R}{r_0 \cdot r_1} \right) \right), P_0 \neq 0$$

$$G(P, P_0) = \frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{R} \right), P_0 = 0$$

$$P_0 = P_0(x_0, y_0)$$

$$P = P(x, y)$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$r_1 = \sqrt{\left( x - x_0 \frac{R^2}{r_0^2} \right)^2 + \left( y - y_0 \frac{R^2}{r_0^2} \right)^2}$$

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

Эта функция является решением уравнения Лапласа с сингулярной правой частью (в правой части функция Дирака) единичной мощности.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \delta(P, P_0)$$

$$G(P, P_0) = 0, P \in \partial\Omega \setminus (\tilde{A}_+ \cup \tilde{A}_-)$$

$$G(P, P_0) = G(P_0, P), \forall P, P_0 \in \Omega$$

Решение уравнения Пуассона выражается через функцию источника:

$$u(P) = \int_{\Omega} f(P_0) G(P, P_0) dP_0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, f = \frac{2F}{D \cdot K} = const$$

Аналитика была посчитана в системе Maple 9.5 методом численного интегрирования `_d01ajc` (Гаусс 10 точек и Кронрод 21 точка). Использовалось для сравнения 6 значащих цифр аналитического решения.

<sup>10</sup> В литературе так же называется функцией Грина.

Таблица

1

Параметры пространственной сетки

Тип конечных элементов	Число узлов сетки при расчете	Число элементов сетки	Относительный размер
Тетраэдр, 4 узла. Линейный конечный элемент.	322	914	0.09
Тетраэдр, 6 узла. Квадратичный конечный элемент.	1876	914	0.09

Таблица

2

Расчет

квадратичным

элементом

$r$  – радиус, на котором находится датчик

$r$ , мм	0	20	40	60
Аналитическое решение, °C	20.	20.	20.	20.
	800	761	672	512
	0	0	0	0
Численное решение, °C	20.	20.	20.	20.
	797	765	669	509
	3	3	2	2
Относительная погрешность, %	0.0	0.0	0.0	0.0
	129	207	135	136
	80	11	44	51

Таблица

3

Расчет линейным элементом

$r$ , мм	0	20	40	60
Аналитическое решение, °C	20.	20.	20.	20.
	800	761	672	512
	0	0	0	0
Численное решение, °C	20.	20.	20.	20.
	793	760	665	504
	9	9	3	9
Относительная погрешность, %	0.0	0.0	0.0	0.0
	293	004	324	346
	26	81	10	14

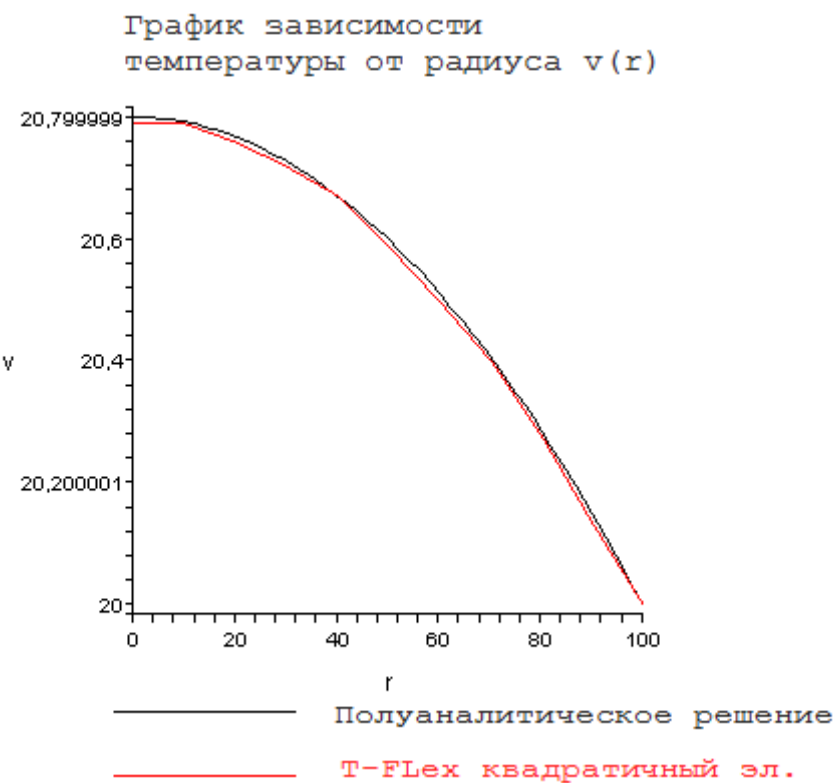


Рисунок 6.11-2 - Измерение радиуса от центра диска;  $r$  в мм.

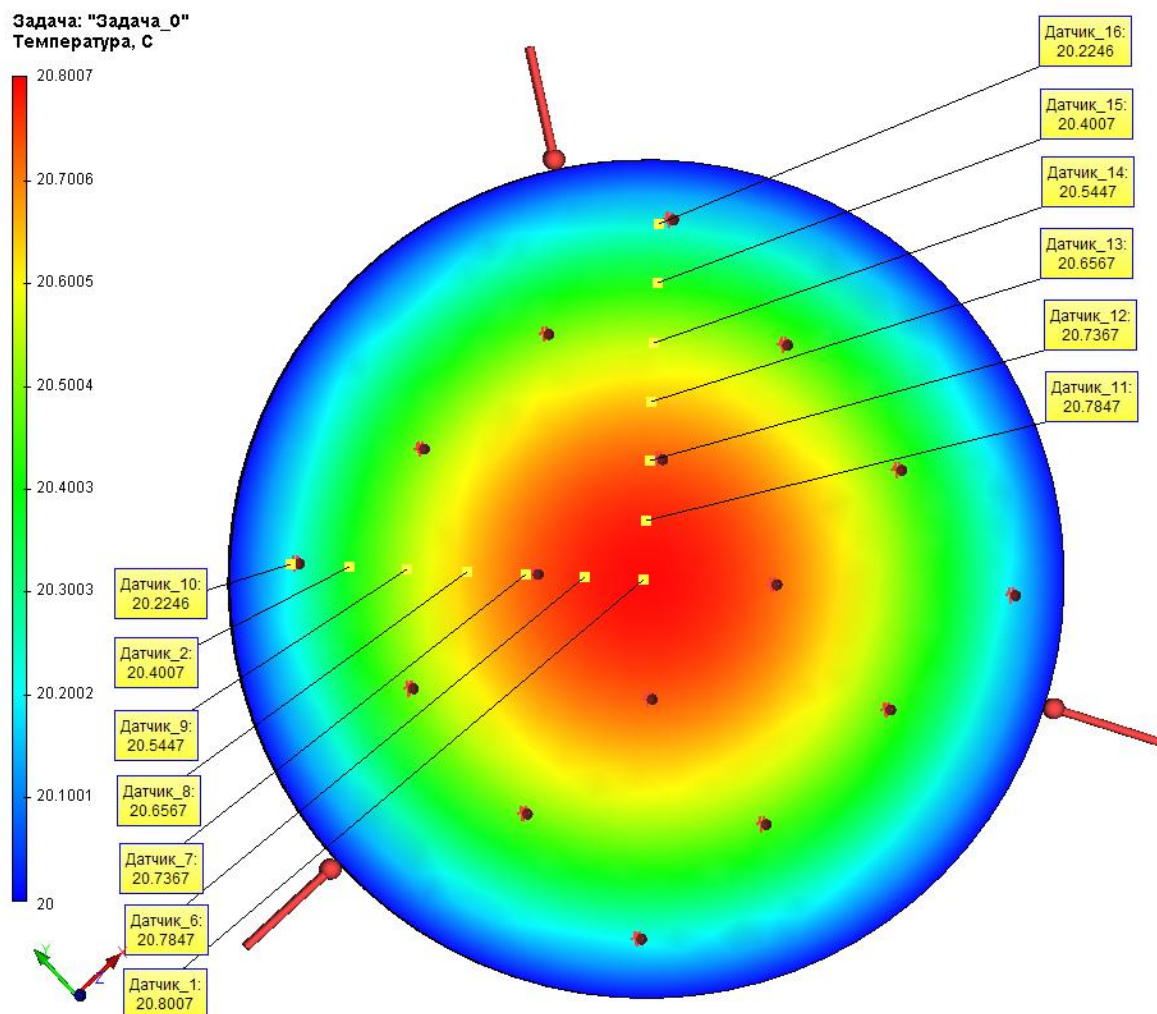


Рисунок 6.11-3 – Температурное поле

### Вывод:

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим не превысила 0,03% для линейного и 0,02 для квадратичного элементов, т.е. решения получены очень точно, до 4-х значащих цифр при небольших вычислительных затратах.

В среднем, относительная погрешность квадратичных элементов оказалась меньше чем у линейных в два раза. При этом использовалось примерно в 6 раз больше узлов для расчета квадратичным элементом.

Особо отметим, что в точке  $r=20$  мм решение, полученное линейным элементом, оказалось даже точнее. И такое действительно возможно из-за свойств сходимости решения в методе конечных

элементов (сходимость в смысле интегральной нормы и меньшее количество точек/аргументов играют роль). Однако предугадать появление и положение этих точек, вообще говоря, невозможно.

### Излучение пластины во внешнюю среду

Рассмотрим задачу расчета установившегося теплового поля бесконечной плоской пластины, излучающей в внешнюю среду. На краях пластины (по длине), поддерживается постоянная температура  $T=500$  °К (считаем, что при такой температуре эффект излучения для нее будет существенен). Излучение происходит с поверхности пластины с обеих ее сторон во внешнюю среду с температурой  $T_{\text{вн}}=293$  К. Считая режим установившимся, определим поле температур на поверхности пластины в контрольных точках, обозначенных датчиками (расположенными вдоль оси ОХ).

Характеристики пластины: толщина  $d=5$  мм; ширина  $l=100$  мм; теплопроводность  $K=50$  Ватт/(м \* °К); излучающая способность  $\alpha=1$ . По границам ширины пластины поддерживается нулевой тепловой поток.

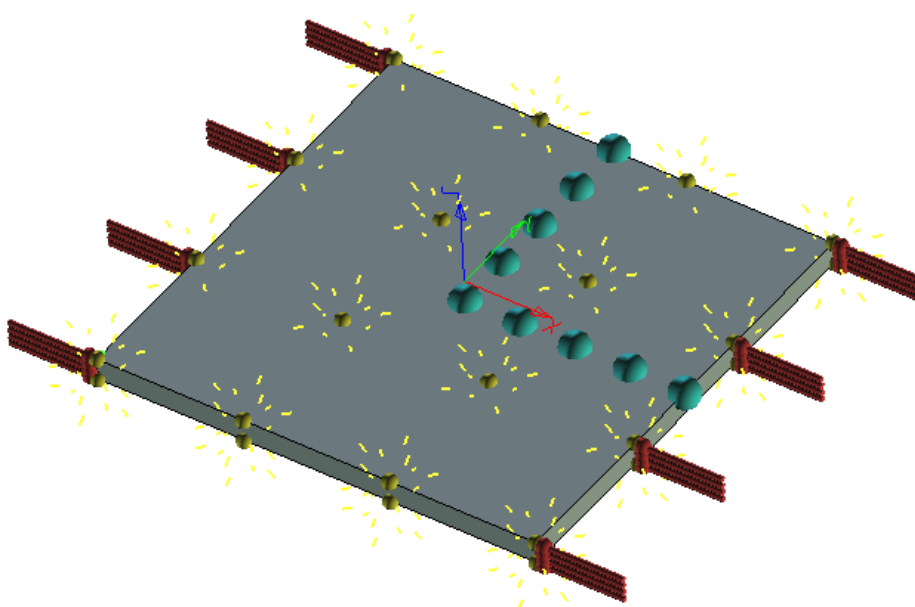


Рисунок 6.12-1 – Расчетная модель с граничными условиями и датчиками

Рассмотрим дифференциальное уравнение данной задачи. Поскольку тепловой поток на противоположных границах пластины равен нулю, то поле температур будет изменяться только по длине пластины. Выбрав систему координат так что ось ОХ направлена по ширине пластины, а ось ОУ по длине, получим, что решение зависит только от ширины пластины. Начальную точку  $O$  координатной системы поместим в центр пластины. Уравнение тогда примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = C \cdot (u^4 - T_{\text{ат}}^4),$$

$$u(a) = u(b) = T$$

Где константа  $C$  определяется с учетом ширины пластины следующим образом:

$$C = \frac{2 \cdot \alpha \cdot \sigma}{K \cdot d},$$

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$$

Где  $\sigma$  – постоянная Больцмана.

Аналитическое решение для данного решения существует в виде разложения в ряд Тейлора. Так же его можно получить численно в системе Maple 9.5<sup>11</sup>. Будем рассматривать значение вдоль длины до средней точки выбранного начала координат, поскольку решение есть четная функция<sup>12</sup>.

Выразим теперь аналитическое решение задачи в виде ряда. Отметим что  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = C \cdot (u^4 - T_{\text{ат}}^4) > 0$ . Т.

к. физически пластина не могла остыть до температуры ниже окружающей среды. Следовательно,

$\frac{\partial u}{\partial x}$  возрастает монотонно из  $-\infty$  в  $+\infty$ , а значит, имеет единственную точку пересечения с осью

ОХ, которая будет точкой минимума функции решения. В окрестности этой точки разложим в ряд функцию решения:

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0) \cdot \frac{\Delta x^2}{2} + \dots + \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x_0) \cdot \frac{\Delta x^n}{n!} + \dots$$

Дифференцируя исходное уравнение, будем получать выражения для старших производных:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = d \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) / dx = \frac{\partial(u^4)}{\partial x} = 4 \cdot u^3 \cdot \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= d \left( 4 \cdot u^3 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) / dx = 4 \cdot u^3 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \cdot \left( u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = C(u^4 - T_{\text{вн}}^4) \right] = \\ &= 4C \cdot u^7 - 4C \cdot u^3 T_{\text{вн}}^4 + 12 \cdot \left( u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \end{aligned}$$

И так далее. Очевидно, что все производные представимы в виде некоторого полинома  $F$  от функций  $u$  и значений ее первой производной.

<sup>11</sup> Решение было получено двумя способами, расхождение составило  $1e-8$  в указанных ниже точках %

<sup>12</sup> С физической точки зрения это очевидно, поскольку по краям задана одинаковая температура, а материал изотропен. В центре будем иметь точку минимума, поскольку тело теряет тепло.

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x) = F\left(u(x), \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}}(x), \frac{\partial^{k-2} u}{\partial x^{k-2}}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x}(x), T\right) = F\left(u(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x), T = \text{const}\right)$$

Для всех нечетных производных все слагаемые полинома  $F$  будут содержать множителем первую производную, поэтому в точке экстремума выполняется  $\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}}(x_0) = 0$ . Следовательно, решение будет иметь вид.

$$u(x_0 + \Delta x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}(x_0) \cdot \frac{\Delta x^{2k}}{(2k)!}$$

Очевидно, что из симметрии краевых условий точка  $x_0$  совпадает с выбранным нулем  $O$  координатной системы.

Простого аналитического выражения для  $\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}(x_0)$  нет, поскольку на каждом шаге вычисления суммы ряда приходится хранить все коэффициенты полинома  $F$ , чтобы вычислить производную на следующем шаге. Поэтому использовались стандартные средства аналитического взятия производной в системе Maple 9.5<sup>13</sup>.

Значение  $u$  в точке  $x_0$  было получено следующим образом: для этого выбирались частичные суммы ряда Тейлора в точке  $x_0 + l/2$  и приравнивались к краевому значению температуры  $T$ . Решение этих уравнений находилось численно, при этом интересовали только положительные действительные корни. В итоге получили, что  $u(0) = 467.4671303$ . Сравним полученное решение с аналитикой.

Таблица

1

Расчет линейным элементом

Координата $Y$ точки измерений (мм)	37.5	25	12.5	0
Аналитическое решение ( $^{\circ}\text{K}$ )	485.442	475.357	469.425	467.467
Линейный элемент ( $^{\circ}\text{K}$ )	488.622	480.737	476.017	474.401
Относительная погрешность, %	0.655073	1.13178	1.40427	1.48331

Таблица

2

Расчет квадратичным элементом

Координата $Y$ точки измерений (мм)	37.5	25	12.5	0
Аналитическое решение ( $^{\circ}\text{K}$ )	485.442	475.357	469.425	467.467

<sup>13</sup> В цикле по числу слагаемых ряда проводилось дифференцирование и подстановка четвертой степени решения

вместо второй производной  $\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}(x)$  и нуля вместо первой в готовое выражение.



Квадратичный элемент (°K)	488.496	480.568	475.908	474.37
Относительная погрешность, %	0.629117	1.09622	1.38105	1.47668

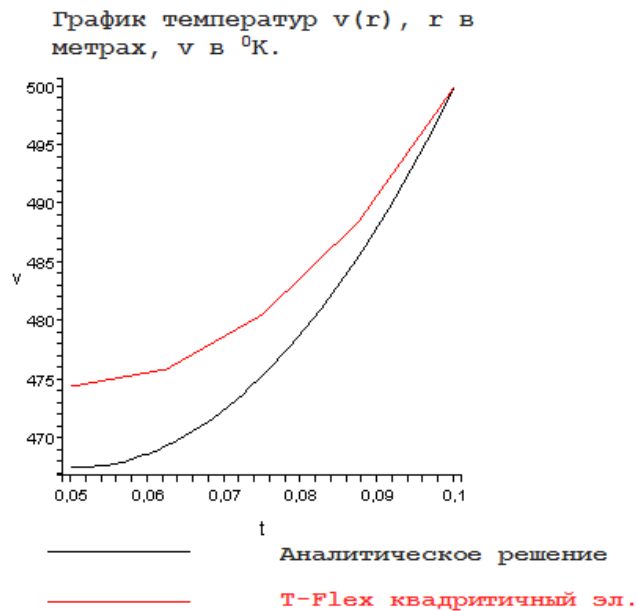


Рисунок 6.12-2 – График распределения температур вдоль ширины пластины

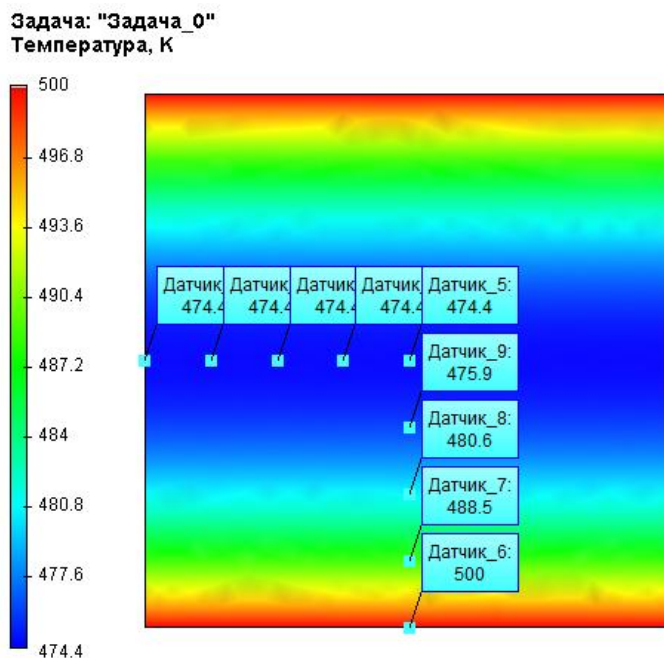


Рисунок 6.12-3 – Картина теплового поля с датчиками измерений

#### Вывод:

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим равна 0,6% (на оси пластины) и достигает 1,5% (на краю пластины). Отметим, что с дроблением сетки решение сходится к аналитическому медленнее в задачах лучистого теплообмена, по причине нелинейности самой задачи.

Как и в примере с излучением полого шара в окружающую среду, делаем **Вывод** о том, что при расчете нелинейной задачи нет разницы в том, каким элементом производить расчет: линейным или квадратичным.

#### Излучение на поверхности полого шара.

Рассмотрим задачу определения стационарного теплового поля полого шара, на внутренней поверхности которого поддерживается постоянная температура  $T_l = 600$  °K, а наружная поверхность излучает во внешнюю среду. Внешняя среда имеет температуру  $T_{окр} = 290$  °K. При такой температуре эффект радиации существенно влияет на температуру в объеме тела. Тепловое поле определим в контрольных точках с радиусами  $R_{123}$ .

Характеристики шара: наружный радиус  $R = 100$  мм; внутренний радиус  $R/2 = 50$  мм; теплопроводность  $K = 50$  Ватт/(м · °K); излучающая способность сферической поверхности равна  $\alpha = 1$ .

Рассмотрим 1/8 всего шара. На боковых гранях шара зададим нулевой тепловой поток.

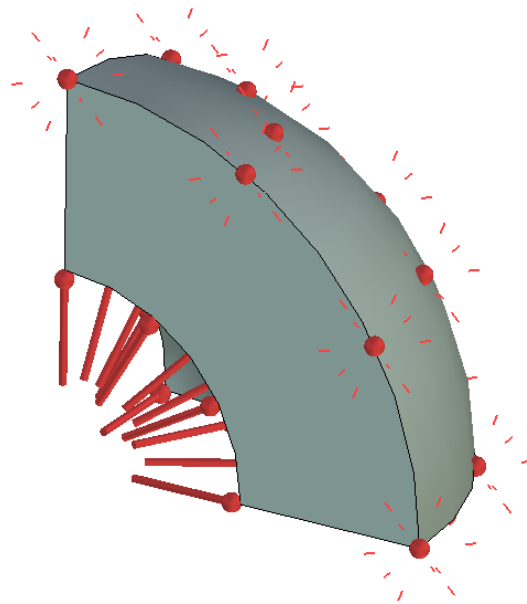


Рисунок 6.13-1 – Расчетная модель с граничными условиями

Поскольку материал изотропен, то решение задачи будет зависеть только от радиуса. Если начало системы сферических координат поместить в центр сферы, то получим уравнение с граничными условиями:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0$$

$$u(R/2) = T_1$$

$$K \frac{\partial u}{\partial r}(R) = \alpha \cdot \sigma \cdot (T_{окр}^4 - u(R)^4)$$

Решение уравнения имеет вид:

$$u = C_1 \cdot \ln(r) + C_2$$

Где константы  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий следующим образом:

$$C_1 = \frac{\alpha \cdot \sigma \cdot R}{K} (T_{окр}^4 - (T_1 + C_1 \cdot \ln(2))^4)$$

$$C_2 = T_1 - C_1 \cdot \ln\left(\frac{R}{2}\right)$$

Первое уравнение (для заданных параметров) имеет два вещественных корня<sup>14</sup>. Для корней:  $C_1 = -4483.400605$  и  $C_2 = -12831.06789$  решение на границе имеет отрицательную температуру. В метрике Кельвина это невозможно. Удовлетворяют этому условию только корни  $C_1 = -13.02949201$  и  $C_2 = 560.9671302$ <sup>15</sup>.

Сравним численное решение с полученным аналитическим решением в точках с радиусами  $R_{123}=0.0707106; 0.0848528; 0.0989949$  м (координаты датчиков в этих точках:  $X_{123}=50;60;70$  мм  $Y_{123}=50;60;70$  мм).

**Таблица**  
**Параметры сетки**

1

Тип конечных элементов	Число узлов при расчете	Число элементов сетки	Относительный размер
Тетраэдр, 4 узла. Линейный конечный элемент.	1562	6823	0.09
Тетраэдр, 6 узлов. Квадратичный конечный элемент.	10594	6823	0.09

**Таблица**  
**Расчет линейным элементом**

2

Радиус точки измерений, м	0.0707106	0.0848528	0.0989949
Аналитическое решение, °К	595.4843221	593.1087648	590.9686443
Численное решение, °К	592.7	589.8	587.7
Относительная погрешность, %	0.47	0.57	0.6

**Таблица**  
**Расчет квадратичным элементом**

3

Радиус точки измерений, м	0.0707106	0.0848528	0.0989949
Аналитическое решение, °К	595.4843221	593.1087648	590.9686443
Квадратичный элемент, °К	592.8	589.9	587.8
Относительная погрешность, %	0.47	0.56	0.54

<sup>14</sup> Корни были найдены средствами системы Maple 9.5

<sup>15</sup> Невязка полученных корней составила  $<1e-10$

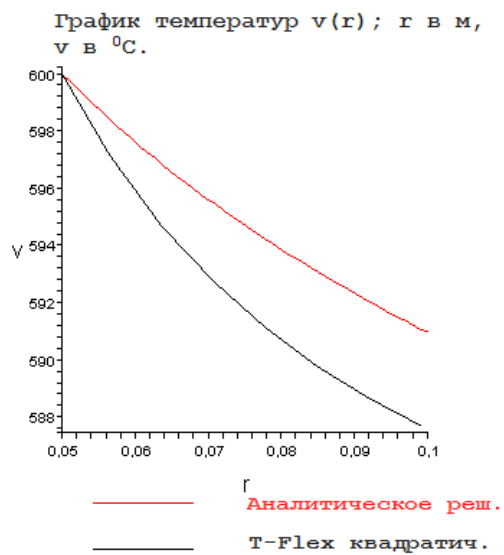


Рисунок 6.13-2 – График зависимости температуры  $V$  от радиуса  $r$  в сферической системе координат

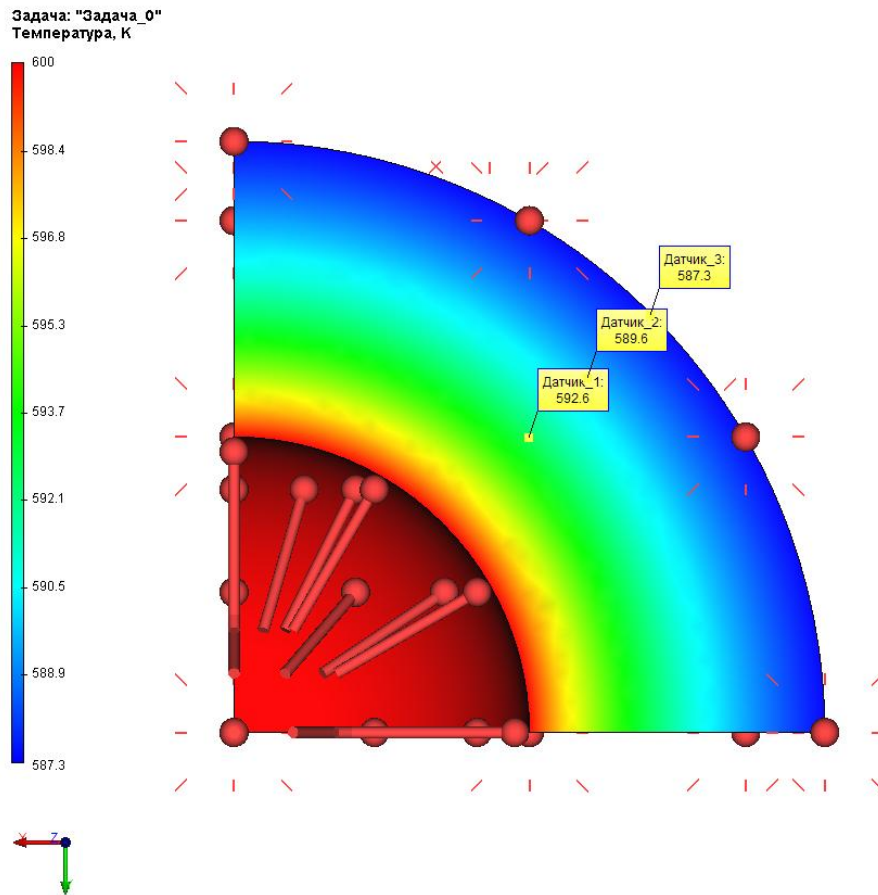


Рисунок 6.13-3 – Вид теплового поля по результатам конечно-элементного анализа с показаниями датчиков

### Вывод:

Относительная погрешность расчета приближается к 0,5%. Отметим, что с дроблением сетки решение сходится к аналитическому медленнее в задачах лучистого теплообмена, по причине нелинейности самой задачи.

Как видно, погрешность при расчете радиации практически одинакова для линейных элементов и квадратичных. Это связано с погрешностью решения нелинейных уравнений. По этому, при расчете радиации имеет смысл расчет только линейным элементом из-за меньших вычислительных затрат.

### Тепловое сопротивление плоской пластинки

Рассмотрим задачу установившегося потока тепла в составной пластине толщиной  $\sum h_i$  с коэффициентами теплопроводности  $k_i$ , на первой и последней поверхностях которой

поддерживаются температуры  $t_1$  и  $t_{n+1}$ , а между пластинами с номером  $m-1$  и  $m+1$  имеется тепловой контакт с удельным сопротивлением  $R_m$  (см. рис.).

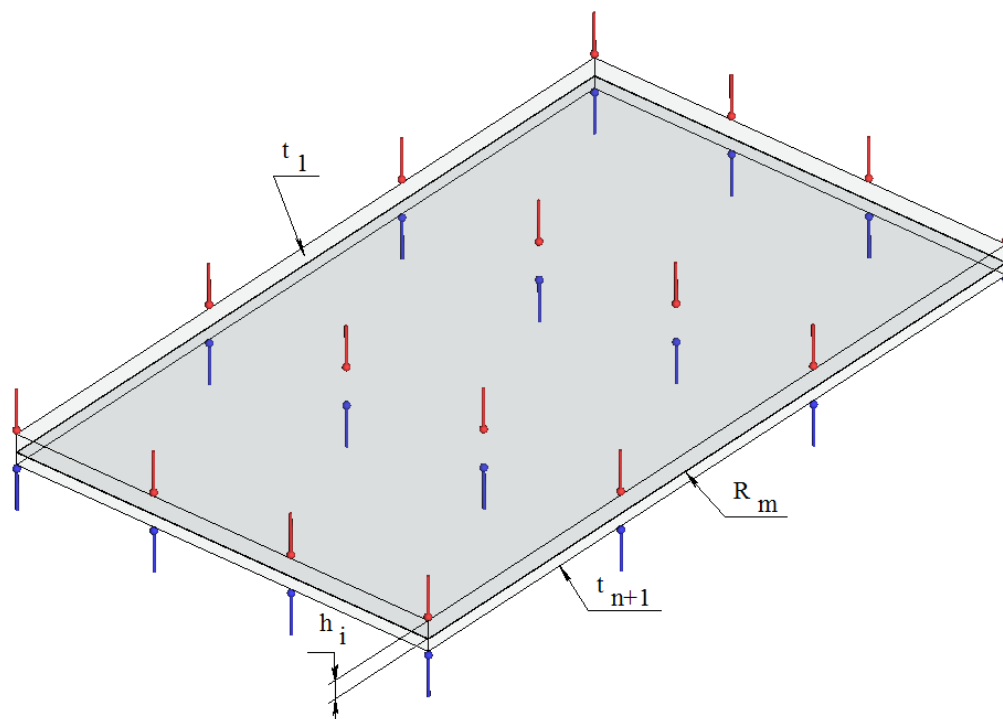


Рисунок 6.14-1 - Расчетная модель с тепловыми нагрузками

Изменение температуры и тепловой поток вдоль толщины составной пластины, состоящей из  $n$  пластинок с толщинами  $h_1, h_2, \dots, h_n$  и коэффициентами теплопроводности  $k_1, k_2, \dots, k_n$  соответственно для каждой пластинки  $f_i, i = 1, 2, \dots, n$  определяется по формуле:

$$f_i = -k_i \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{k_i(t_{i+1} - t_i)}{h_i} = \frac{(t_i - t_{i+1})}{R_i}, R_i = \frac{h_i}{k_i}, t_i < t_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n$$

Пусть все пластинки, кроме двух, находятся в идеальном тепловом контакте по поверхностям раздела, а между пластинами с номером  $m-1$  и  $m+1$  поместим тепловое сопротивление  $R_m$ , тогда тепловой поток будет непрерывен при переходе из одной области в другую и, в данном случае, будет одинаков в любой точке (то есть,  $f_1 = f_2 = \dots = f_n = f$ ). Изменение температуры между противоположными поверхностями всей составной пластины будет равно сумме изменений температур в отдельных пластинках:

$$(t_1 - t_2) + (t_2 - t_3) + \dots + (t_i - t_{i+1}) + \dots + (t_n - t_{n+1}) = t_1 - t_{n+1}$$

Тогда

$$t_1 - t_{n+1} = f_1 R_1 + f_2 R_2 + \dots + f_n R_n = (R_1 + R_2 + R_m + \dots + R_n) f, R_i = \frac{h_i}{k_i}, i = 1, 2, \dots, n,$$

$$f = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\frac{h_1}{k_1} + \frac{h_2}{k_2} + \dots + R_m + \dots + \frac{h_n}{k_n}}$$

Примем следующие исходные данные: число пластинок  $n = 2$ , длина и ширина каждой пластины равны 500 мм и 250 мм соответственно, толщины пластинок  $h_1, h_3$  равны 8 мм, 12 мм. Приложенные температуры  $t_1$  и  $t_4$  равны 373° K и 273° K соответственно.

$$\text{Коэффициенты теплопроводности: } k_1 = 43 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}, k_3 = 200 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$$

$$\text{Температурное сопротивление контакта } R_2 = 3.33 \times 10^{-4} \frac{\text{м}^2 \cdot \text{град}}{\text{Вт}} \text{ (примерно эквивалентное тепловому сопротивлению плоского слоя воздуха толщиной 0,05 мм с } k_2 = 0.15 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}})$$

$$\text{Таким образом, } f = 1.72599 \times 10^5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2},$$

$$t_2 = -R_1 f + t_1 = -1.860465 \times 10^{-4} \cdot 1.72599 \times 10^5 + 373 = 340.88 \text{ K},$$

$$t_3 = -(R_1 + R_2) f + t_1 = -(1.860465 \times 10^{-4} + 3.33 \times 10^{-4}) \cdot 1.72599 \times 10^5 + 373 = 283.35 \text{ K}.$$

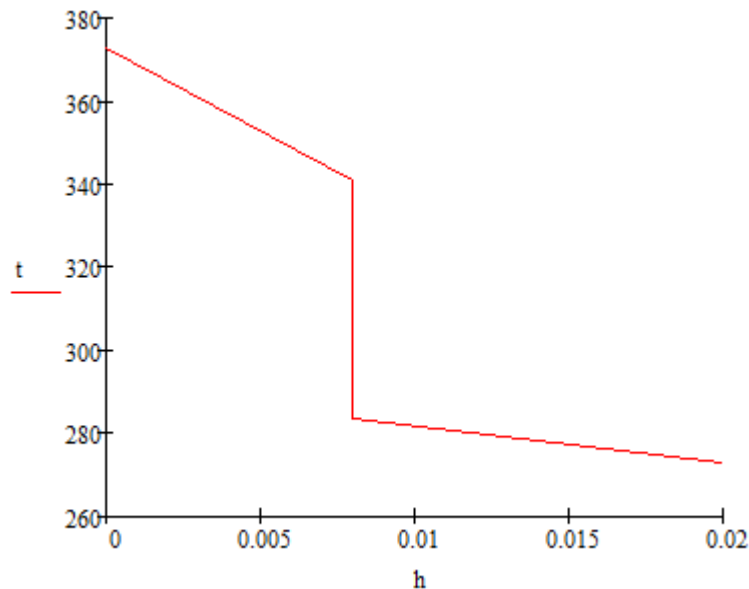


Рисунок 6.14-2 – График перепада температур на границе теплового контакта



Выполнив расчёт при помощи T-Flex Анализ, получили следующие результаты:

Параметры сетки			
Тип конечного элемента:	квадратичный тетраэдр (10 узлов)		
Число главных узлов:	68155	Число узлов при расчёте задачи:	68155
Число конечных элементов	44043		
Результаты расчётов			
	Численное решение, $w^*$	Аналитическое решение $w$	Ошибка $\delta_u = \frac{ w - w^* }{w} \times 100\%$
Тепловой поток, $\frac{Bm}{M^2}$	$1.72608 \times 10^5$	$1.75631 \times 10^5$	1.72 %
Температура, $t_2, K$	340.88	340.88	0.003 %
Температура, $t_3, K$	283.36	283.35	0.003 %

Задача: "Линейный"  
Температура, К

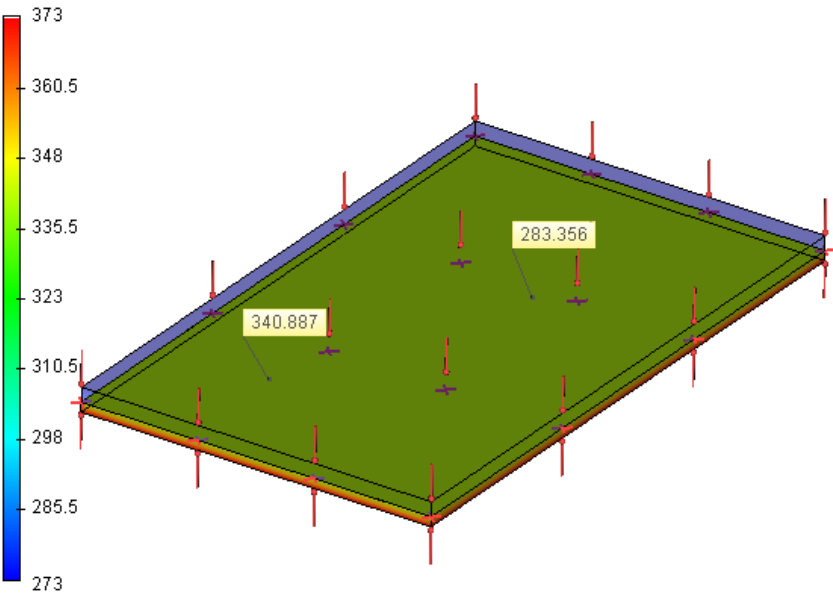


Рисунок 6.14-3 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (температура)

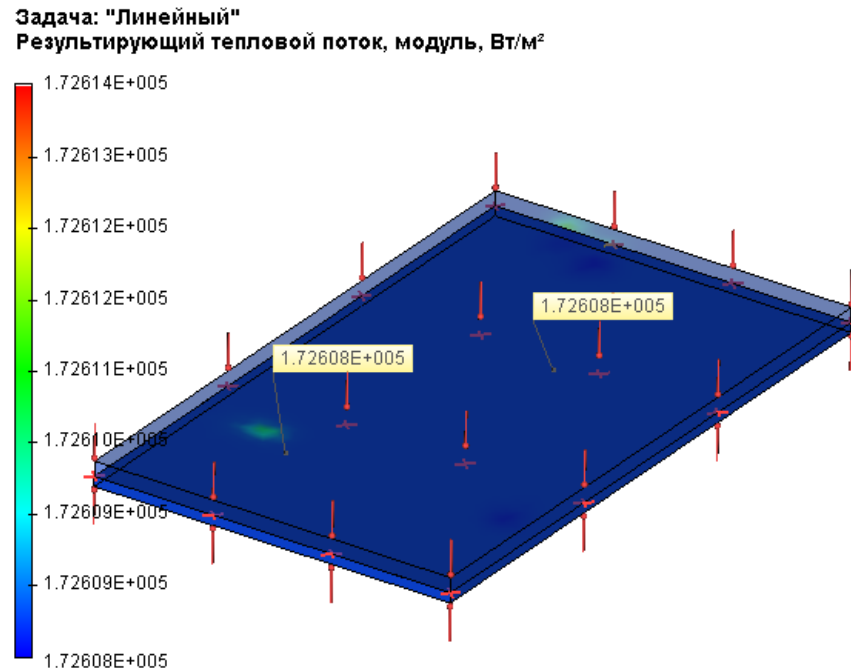


Рисунок 6.14-4 –Результаты расчетов в T-FLEX Анализ (температура)

### Тепловое сопротивление сферы

Рассмотрим задачу установившегося потока тепла в составной сферической пластине толщиной  $\sum 0,5\Delta d_i$  с коэффициентами теплопроводности  $k_i$ , на первой и последней поверхностях которой поддерживаются температуры  $t_1$  и  $t_{n+1}$ , а между пластинами с номером m-1 и m+1 имеется тепловой контакт с удельным сопротивлением  $R_m$  (см. рис.).

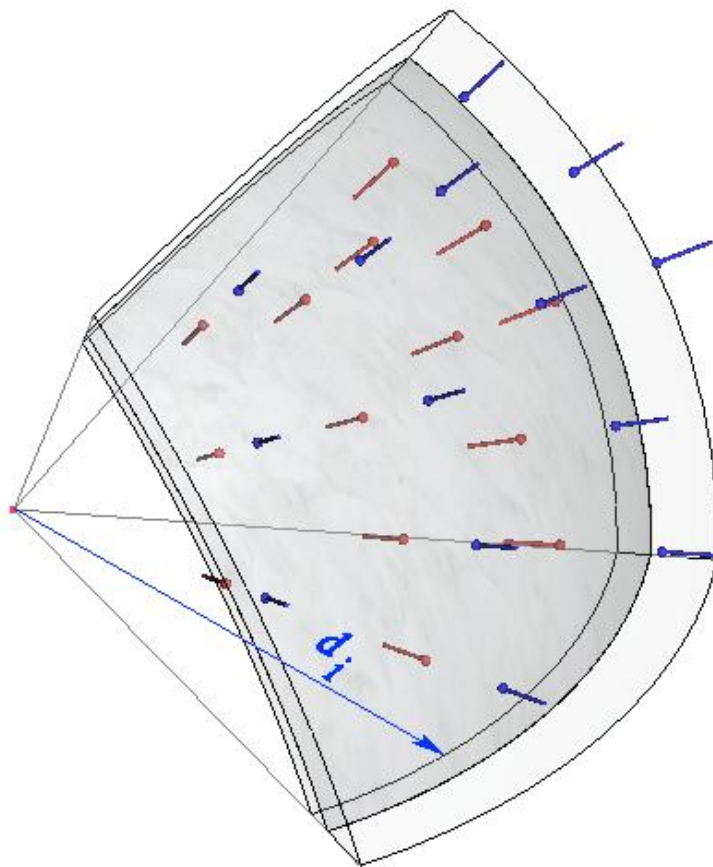


Рисунок 6.15-1 – Расчетная модель с граничными условиями

Изменение температуры и тепловой поток вдоль толщины составной пластины, состоящей из  $n$  пластинок с диаметрами  $d_1, d_2, \dots, d_n$  и коэффициентами теплопроводности  $k_1, k_2, \dots, k_n$  соответственно для каждой пластинки  $f_i, i = 1, 2, \dots, n$  определяется по формуле:

$$f_i = -k_i \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{2\pi k_i (t_{i+1} - t_i)}{\left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}}\right)} = \frac{(t_i - t_{i+1})}{R_i}, R_i = \frac{\left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}}\right)}{2\pi k_i}, t_i < t_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n$$

Пусть все пластинки, кроме двух, находятся в идеальном тепловом контакте по поверхностям раздела, а между пластинами с номером  $m-1$  и  $m+1$  поместим тепловое сопротивление  $R_m$ , тогда тепловой поток будет непрерывен при переходе из одной области в другую и, в данном случае, будет одинаков в любой точке (то есть,  $f_1 = f_2 = \dots = f_n = f$ ). Изменение температуры между

противоположными поверхностями всей составной пластины будет равно сумме изменений температур в отдельных пластинках:

$$(t_1 - t_2) + (t_2 - t_3) + \dots + (t_i - t_{i+1}) + \dots + (t_n - t_{n+1}) = t_1 - t_{n+1}$$

Тогда

$$t_1 - t_{n+1} = f_1 R_1 + f_2 R_2 + \dots + f_n R_n = (R_1 + R_2 + R_m + \dots + R_n) f, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$f = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\frac{\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)}{2\pi k_1} + \frac{\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_3}\right)}{2\pi k_2} + \dots + R_m + \dots + \frac{\left(\frac{1}{d_n} - \frac{1}{d_{n+1}}\right)}{2\pi k_n}}$$

Примем следующие исходные данные: число пластинок  $n = 2$ , диаметры пластинок  $d_1, d_2, d_3$  равны соответственно 350, 380, 420 мм. Приложенные температуры  $t_1$  и  $t_4$  равны  $473^0 K$  и  $273^0 K$  соответственно.

Коэффициенты теплопроводности:  $k_1 = 43 \frac{Bm}{m \cdot \text{град}}$ ,  $k_3 = 200 \frac{Bm}{m \cdot \text{град}}$  (сталь и алюминиевый сплав).

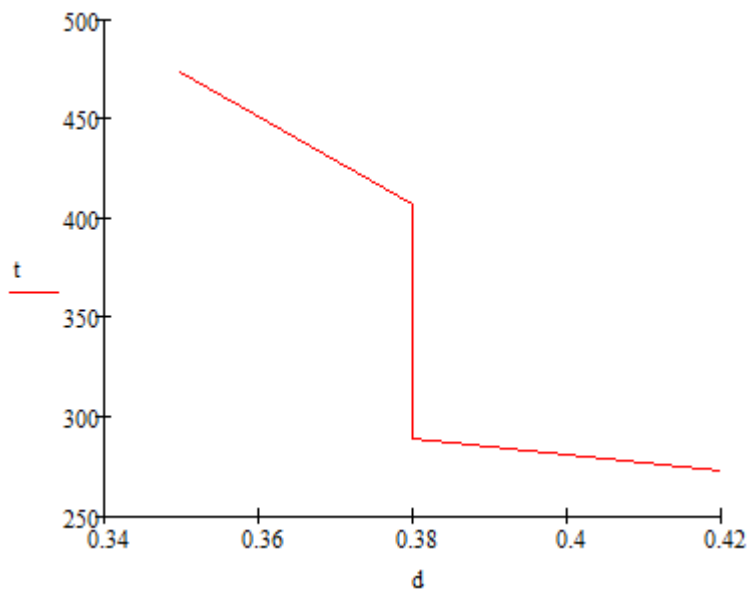
Температурное сопротивление контакта  $R_2 = 1.5 \times 10^{-3} \frac{m^2 \cdot \text{град}}{Bm}$  (примерно эквивалентное тепловому сопротивлению сферического слоя воздуха толщиной 0,1 мм с  $k_2 = 0.15 \frac{Bm}{m \cdot \text{град}}$ )

$$f = 7.8917 \times 10^4 \frac{Bm}{m^2},$$

Таким образом,

$$t_2 = -R_1 f + t_1 = 8.349 \times 10^{-4} \cdot 7.8917 \times 10^4 + 473 = 407.1 K,$$

$$t_3 = -(R_1 + R_2) f + t_1 = -(8.349 \times 10^{-4} + 1.5 \times 10^{-3}) \cdot 7.8917 \times 10^4 + 473 = 288.7 K.$$



**Рисунок 6.15-2 – График перепада температур на границе теплового контакта**

Выполнив расчёт при помощи T-FLEX Анализ, получили следующие результаты (с нижней и верхней стороны контакта соответственно):

Задача: "Задача\_0"  
Температура, К

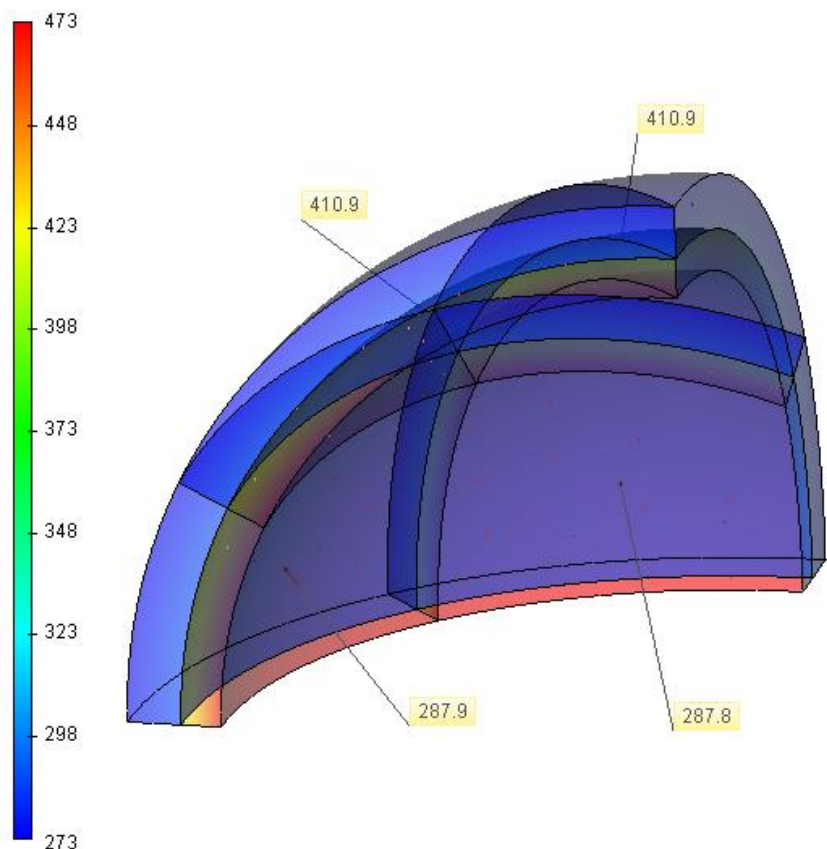


Рисунок 6.15-3 – Результат конечно-элементного расчета (температура)

Параметры сетки			
Тип конечного элемента	квадратичный тетраэдр (10 узлов)		
Число главных узлов:	22115	Число узлов при расчёте задачи:	22115
Число конечных элементов	101217		
Результаты расчётов			
	Численное решение, $w^*$	Аналитическое решение $w$	Ошибка $\delta_u = \frac{ w - w^* }{w} \times 100\%$
Тепловой поток, $\frac{Bm}{m^2}$	$1.08 \times 10^5$	$7.8917 \times 10^4$	$0.36 \times 10^2 \%$

Температура, $t_2, K$	410.9	407.1	1 %
Температура, $t_3, K$	287.8	288.7	-0.3 %

Параметры сетки			
Тип конечного элемента:	линейный тетраэдр (4 узла)		
Число главных узлов:	22107	Число узлов при расчёте задачи:	22107
Число конечных элементов	101190		
Результаты расчётов			
	Численное решение, $w^*$	Аналитическое решение $w$	Ошибка $\delta_u = \frac{ w - w^* }{w} \times 100\%$
Тепловой поток, $\frac{\hat{A}\dot{\vartheta}}{i^2}$	$1.08 \times 10^5$	$7.8917 \times 10^4$	$0.36 \times 10^2$ %
Температура, $t_2, K$	410.9	407.1	1 %
Температура, $t_3, K$	287.9	288.7	−0.3 %

### Нестационарное тепловое поле в изотропном шаре

Рассмотрим задачу определения температуры внутри изотропного шара, в объеме которого задана начальная температура  $T_{start}=20$  °С, и нагреваемого по наружной поверхности, на которой задана постоянная температура  $T_{border}=100$  °С (например, шар при комнатной температуре опустили в кипящую воду). Определим температуру в любой его точке (находящейся на расстоянии  $r$  от центра шара) через промежутки времени  $\Delta t_{1,2,3} = 10, 20, 30$  с .

Шар имеет следующие параметры: радиус  $a = 100$  мм, плотность материала  $7800$  кг / м<sup>3</sup>, теплоемкость  $c = 440$  Дж / (кг · °С), теплопроводность  $K=50$  Ватт / (м · °С). Такие тепловые характеристики присутствуют у некоторых сплавов стали.

Для численного моделирования рассмотрим 1/8 часть всего шара. Условия симметрии выражаются в том, что на границах этой части шара, имеющих вершиной центр целого шара, зададим нулевой тепловой поток.<sup>16</sup>

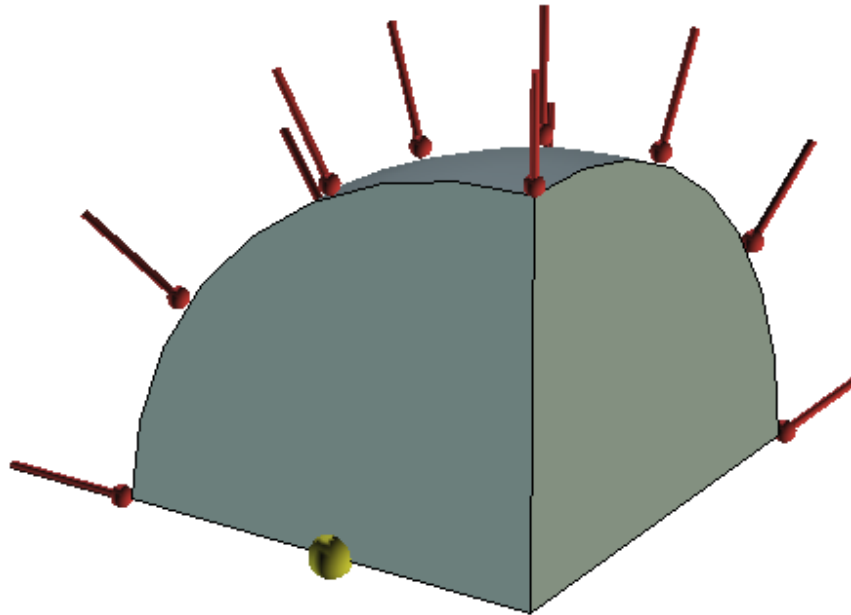


Рисунок 6.16-1 – Расчетная модель с граничными условиями и датчиком, расположенным в координате  $r=50$  мм

На рисунке выше представлена модель твердого тела. Желтым цветом показан датчик температуры. Он ровно на половину радиуса удален от центра сферы.

Пусть  $v$  – есть искомое решение (температурное поле). Тогда, учитывая, что оно не зависит от углов поворота вектора, имеющего началом центр сферы (условие симметрии) заменой переменной вида  $v=r \cdot u$ , где  $r$  – это расстояние от центра сферы, а  $u$  – некоторая функция, получим уравнение для  $u$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{c \cdot \rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

Где  $t$  – это время остывания/нагрева твердого тела. Граничные условия для

$$u(r,0) = r \cdot f(r) = T_{start} \cdot r, t = 0$$

$$u: u(a,t) = r \cdot \phi(t) = T_{border} \cdot r, r = a$$

Решая его методом разделения переменной, получим выражение для  $v$ :<sup>17</sup>

<sup>16</sup> На границах, на которых не задано ни одного граничного условия равенство теплового потока нулю задается по умолчанию.

<sup>17</sup> Г. Карслоу, Д. Егер, Теплопроводность твердых тел. Изд. «Наука», Москва 1964 г. с. 230



$$v(r,t)=\frac{2}{ar}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot e^{-\chi\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)t}\cdot\sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right)$$

Где  $\chi=K/(c\cdot\rho)$  коэффициент температуропроводности. А веса разложения  $A_n$  определяются по формуле:

$$A_n=\int_0^a r'\cdot f(r')\sin\left(\frac{\pi nr'}{a}\right)dr'-n\pi\chi(-1)^n\int_0^t e^{\chi\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)\lambda}\cdot\varphi(\lambda)d\lambda=$$
  
$$=\frac{a^2}{n\pi}(-1)^{n+1}\cdot\left\{T_{start}+T_{border}\left(e^{\chi\left(\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)t}-1\right)\right\}$$

Сравним численное решение с полуаналитическим.

Таблица

Параметры сетки

1

Тип конечных элементов	Число узлов сетки при расчете		Число элементов сетки	Относительный размер
	Линейным элементом	Квадратичным элементом		
Тетраэдр, 4 узла	1776	11966	7711	0.09

Таблица

Параметры временной дискретизации

2

Полное время расчета (с)	Шаг по времени (с)	Число временных слоев
120	1	120

Поскольку альтернативное решение (с которым сравнивается T-Flex) получено полуаналитическим путём (выделением частичных сумм ряда), необходимо определиться с количеством значащих цифр, которые можно использовать для сравнения с аналитикой. Таблица, представленная ниже, показывает: с какой точностью велся расчет, для получения решения разложением в ряд и для построения графика решения. **Вывод** о количестве значащих цифр в аналитике делается по показателю относительного изменения решения, и том факте, что наш ряд всегда сходится.

Таблица

Параметры расчета полуаналитического решения, полученного разложением в ряд:

3

Количество членов ряда, N	Время в с. t, (температура зависит от	Значение температур y, u <sub>n</sub> (t), в °С.	Значение температур y, при удвоении N,	Относительное изменение
---------------------------	---	---	---	-------------------------

	времени)		$u_{2n}(t)$ , в $^{\circ}\text{C}$ .	$\delta = \frac{ u_n - u_{2n} }{ u_n } \cdot 100\%$
500	10	20.48013866	20.41647716	0.31
	20	26.07028450	26.00662298	0.24
	30	34.46547534	34.40181384	0.18
7000	10	20.53470594	20.53925332	0.02
	20	26.12485180	26.12939918	0.01
	30	34.52004264	34.52459002	0.01

Для численного расчета применимы результаты для  $N=7000$ . Для построения графиков применимы результаты для  $N=500$ .

Таблицы значений температур в точке  $r=50$  мм (середина радиуса) в  $^{\circ}\text{C}$ .

**Таблица №1 для расчета линейным элементом, 4 значащие цифры.**

Время расчета $t$ , с	10	20	30
Аналитическое решение, $^{\circ}\text{C}$	20.53	26.12	34.52
Численное решение, $^{\circ}\text{C}$	20.37	26.08	34.67
Относительная погрешность, %	0.7793	0.1531	0.4345

**Таблица №2 для расчета квадратичным элементом, 4 значащие цифры.**

Время расчета $t$ , с	10	20	30
Аналитическое решение, $^{\circ}\text{C}$	20.53	26.12	34.52
Численное решение, $^{\circ}\text{C}$	20.61	26.16	34.58
Относительная погрешность, %	0.3896	0.1531	0.1738

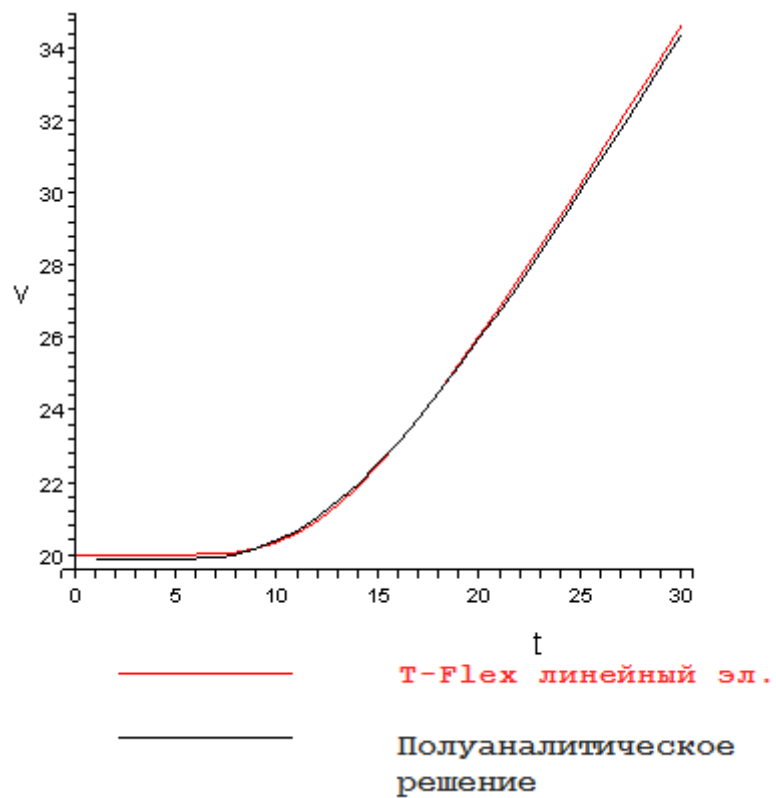


Рисунок 6.16-2 - График зависимости температуры  $V(t)$  в точке  $r=50$  мм от времени  $t$

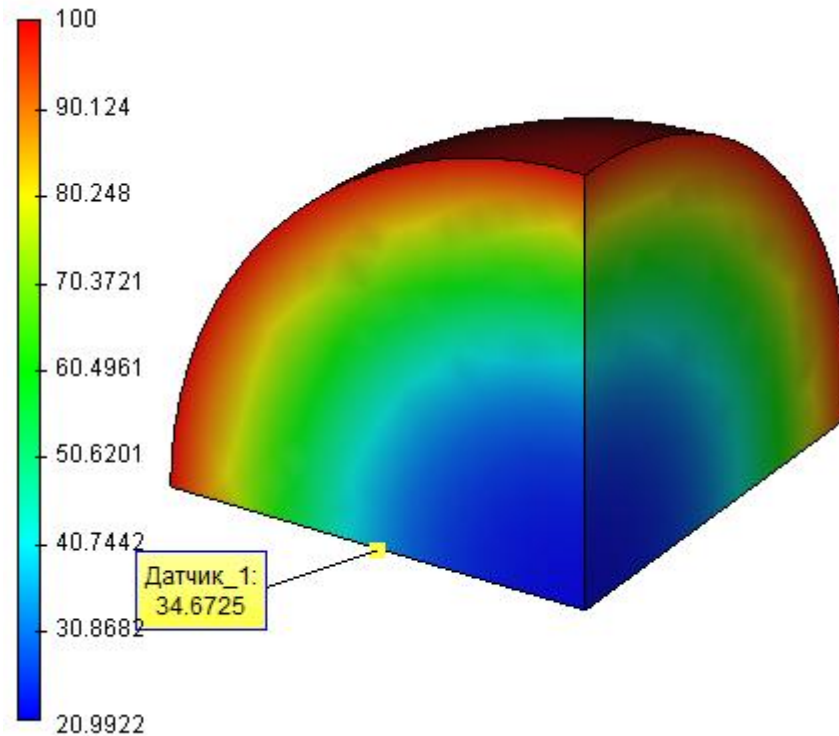


Рисунок 6.16-3 - Вид теплового поля через 30 секунд

#### Вывод:

Получили реалистичную картину поля. Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим не превышает 0,8% при расчете линейным и 0,4% - квадратичным элементом. Погрешность расчета по времени устойчива и существенно не растет с увеличением расчетного времени. На графике зависимости температуры от времени видно, что аналитическое решение и численное решение практически совпали.

Погрешность расчета квадратичными элементами меньше, чем при расчете линейными элементами на небольшом интервале времени.

#### Нестационарное тепловое поле в изотропном шаре с теплоотдачей на поверхности

Рассмотрим задачу определения температуры внутри изотропного шара, от которого отводится тепло, если в объеме шара задана начальная температура  $T_{start} = 80$  °C, а на его границе задан тепловой поток величиной  $F = -800$  Ватт/(м<sup>2</sup> °C). Знак «-» означает, что шар теряет тепло. Определим температуру шара в любой его точке через промежутки времени  $\Delta t_{1,2,3} = 20, 60, 90, 120$  с

Параметры шара: радиус  $a = 100$  мм, плотность материала  $7800$  кг / м<sup>3</sup>, теплоемкость  $c = 480$  Дж / (кг · °C), теплопроводность  $K = 150$  Ватт / (м · °C).

Для численного моделирования рассмотрим 1/8 часть всего шара. Условия симметрии выражаются в том, что на границах этой части шара, имеющих вершиной центр целого шара, зададим нулевой тепловой поток.<sup>18</sup>

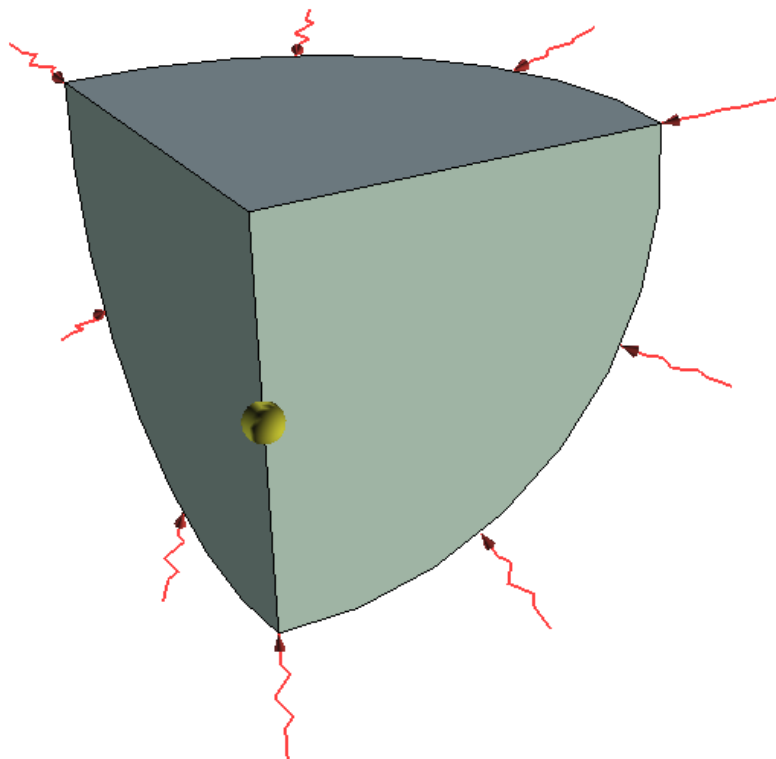


Рисунок 6.17-1 – Расчетная модель с граничными условиями

На рисунке выше представлена модель твердого тела. Пусть  $v$  – есть искомое решение (температурное поле). Тогда, учитывая, что оно не зависит от углов поворота вектора, имеющего началом центр сферы (условие симметрии) заменой переменной вида  $v=r \cdot u$ , получим уравнение для  $u$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{c \cdot \rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

Где  $t$  – это время остывания/нагрева твердого тела. Граничные условия для  $u$  выражаются в следующей форме:

<sup>18</sup> На границах, на которых не задано ни одного граничного условия равенство теплового потока нулю задается по умолчанию.

$$u(r,0) = r \cdot f(r) = T_{start} \cdot r, t = 0$$

$$K \frac{\partial u}{\partial r}(a,t) = F, r = a$$

Где  $f(r)$  – начальное распределение температуры. Готовое решение этой задачи представлено ниже.<sup>19</sup>

$$v(r,t) = \frac{3Ft}{\rho c a} + \frac{F(5r^2 - 3a^2)}{10Ka} - \frac{2Fa^2}{Kr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(r\alpha_n/a)}{\alpha_n^2 \sin(\alpha_n)} \cdot e^{-\chi \cdot \alpha_n^2 \cdot t / a^2} + T_{start}$$

Где  $\chi = K/(c \cdot \rho)$  коэффициент температуропроводности. А величины  $\alpha_n$  определяются как корни уравнения (только положительные корни):

$$tg(\alpha_n) = \alpha_n$$

Аналитическое решение получено с 6 значащими цифрами.

**Таблица**

**Параметры сетки**

1

Тип конечных элементов	Число узлов сетки при расчете		Число элементов сетки	Относительный размер
	Линейным элементом	Квадратичным элементом		
Тетраэдр, 4 узла	1776	11966	7711	0.09

**Таблица**

**Параметры временной дискретизации**

2

Полное время расчета (с)	Шаг по времени (с)	Число временных слоев
120	1	120

Таблицы значений температур в точке от центра на расстоянии 50 мм в °С.

**Таблица №1 для расчета линейным элементом**

Время расчета $t$ , с	20	60	90	120
Аналитическое решение, °С	79.9481	79.7080	79.5163	79.3240
Численное решение, °С	79.9491	79.7086	79.5167	79.3242
Относительная погрешность, %	0.00125	0.00068	0.00044	0.00013

**Таблица №2 для расчета квадратичным элементом**

Время расчета $t$ , с	20	60	90	120
Аналитическое решение, °С	79.9481	79.7080	79.5163	79.3240

<sup>19</sup> Г. Карслоу, Д. Егер, Теплопроводность твердых тел. Изд. «Наука», Москва 1964 г. с. 234

Авторы привели решение задачи для нулевой начальной температуры. К их решению надо просто прибавить константу  $T_{start}$

Численное решение, °C	79.9479	79.7075	79.5155	79.3231
Относительная погрешность, %	0.00035	0.00070	0.00107	0.00126

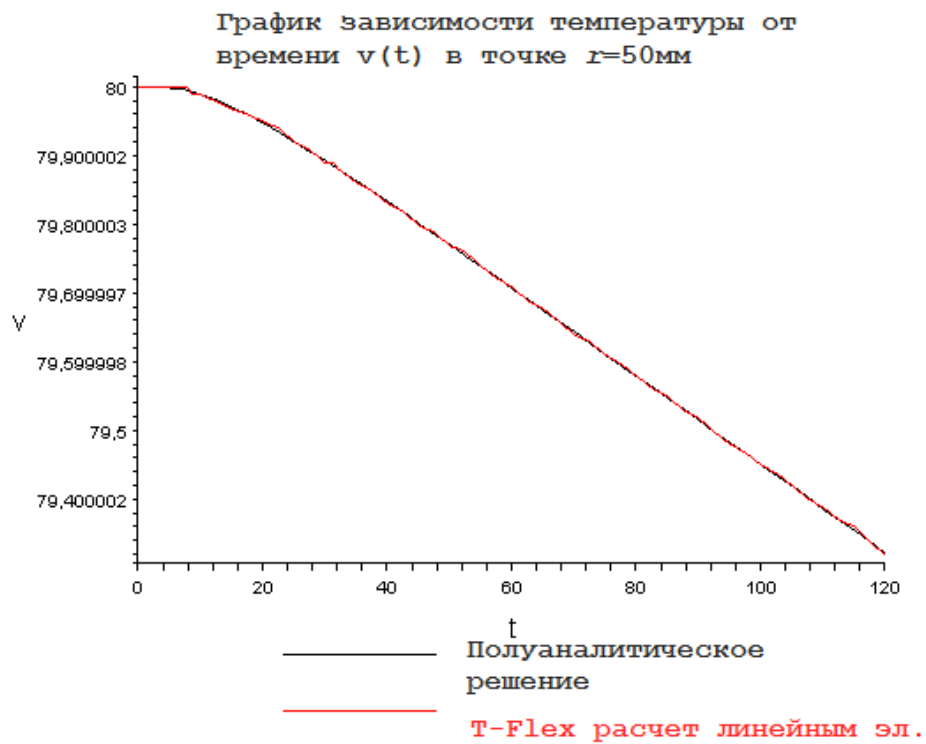


Рисунок 6.17-2 – График зависимости температуры  $V(t)$  от времени  $t$  в точке  $r=50\text{ мм}$



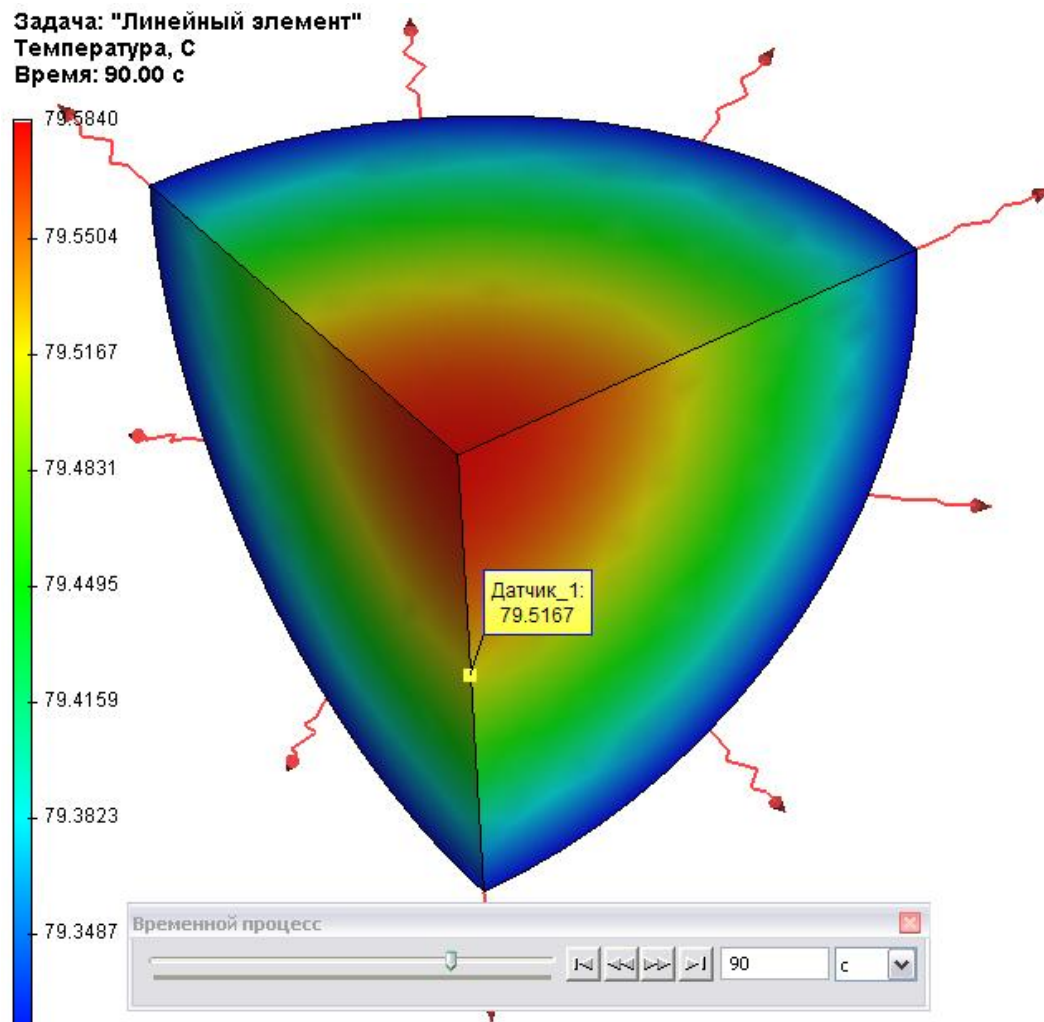


Рисунок 6.17-3 - Вид теплового поля через 90 секунд (лин. элемент)

### Вывод:

Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим меньше 0.01 %. Погрешность расчета по времени устойчива и существенно не растет с увеличением расчетного времени. На графике зависимости температуры от времени видно, что аналитическое решение и численное решение практически совпали.

При расчете квадратичными элементами используется гораздо больше узлов для расчета, чем при использовании линейных элементов. Следовательно, со временем (на каждом новом временном слое), у квадратичных элементов накапливается большая погрешность, чем у линейных. Как можно видеть, через 20 с, т. е. на относительно небольшом промежутке времени для нашей задачи,

квадратичные элементы оказались точнее линейных, однако на существенном интервале времени их погрешность расчета стала даже выше.

### Нестационарное тепловое поле в изотропном шаре с теплообменом на поверхности

Рассмотрим задачу определения температуры в любой точке внутри шара, через промежутки времени  $\Delta t_{1,2,3} = 30, 40, 60$  с, если в объеме шара задана начальная температура  $T_{start}=60$  °С а на его границе задан конвективный теплообмен с коэффициентом теплоотдачи  $H=300$  Ватт/(м<sup>2</sup>·°С)<sup>20</sup> (шар, имевший температуру внутри 60 °С, опущен в холодную морскую воду с температурой нуль градусов).

Параметры шара: радиус  $a=100$  мм, плотность материала  $7800$  кг / м<sup>3</sup>, теплоемкость  $c=440$  Дж / (кг · °С), теплопроводность  $K=50$  Ватт / (м · °С). Для численного моделирования рассмотрим 1/8 часть всего шара. Условия симметрии выражаются в том, что на границах этой части шара, имеющих вершиной центр целого шара, зададим нулевой тепловой поток.<sup>21</sup>

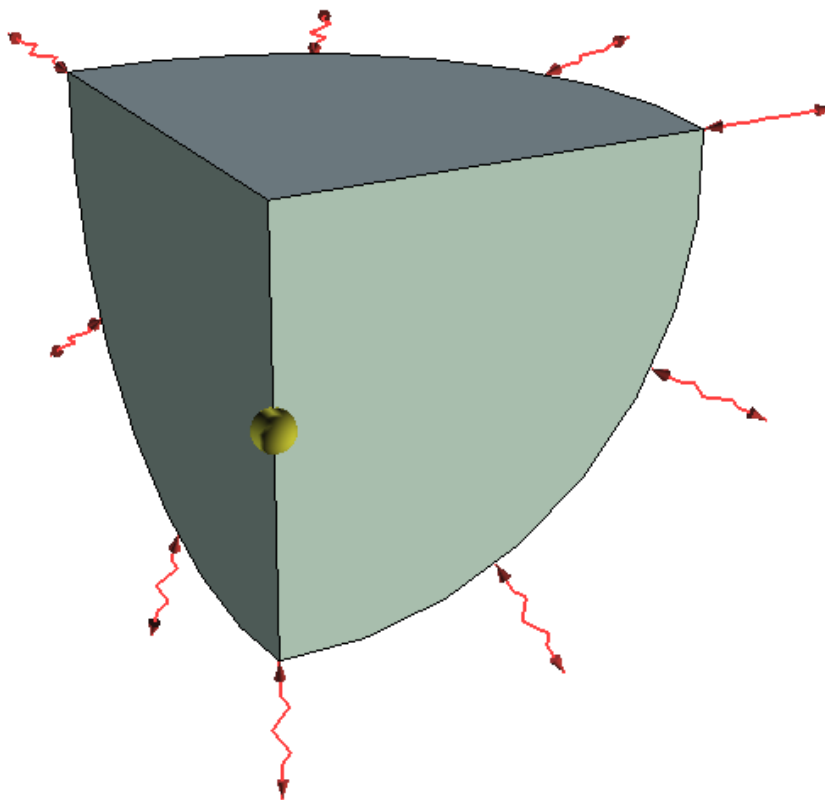


Рисунок 6.18-1 – расчетная модель с граничными условиями

<sup>20</sup> Параметр коэффициента теплоотдачи для воды без течения был взят с сайта <http://www.helpw.ru/Teplotdach.php>

<sup>21</sup> На границах, на которых не задано ни одного граничного условия равенство теплового потока нулю задается по умолчанию.

На рисунке выше представлена модель твердого тела. Пусть  $v$  – есть искомое решение (температурное поле). Тогда, учитывая, что оно не зависит от углов поворота вектора, имеющего началом центр сферы (условие симметрии) заменой переменной вида  $v=r \cdot u$ , получим уравнение для  $u$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{c \cdot \rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

Где  $t$  – это время остывания/нагрева твердого тела. Граничные условия для  $u$  выражаются в следующей форме:

$$u(r,0) = r \cdot f(r) = T_{start} \cdot r, t = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(a,t) + \left(h - \frac{1}{a}\right)u = 0, r = a$$

Где  $f(r)$  – начальное распределение температуры, а коэффициент  $h = H/K$ .

Решая его методом разделения переменной, получим выражение для  $v$ :<sup>22</sup>

$$v(r,t) = \frac{2hT_{start}}{r} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\chi \cdot \alpha_n^2 \cdot t} \cdot \sin(r \cdot \alpha_n)$$

Где  $\chi = K/(c \cdot \rho)$  коэффициент температуропроводности. А веса разложения  $A_n$  и величины  $\alpha_n$  определяются по формуле:

$$A_n = \sin(a \cdot \alpha_n) \cdot \frac{a^2 \alpha_n^2 + (ah - 1)^2}{\alpha_n^2 (a^2 \alpha_n^2 + ah(ah - 1))}$$

$u$

$$a \cdot \alpha_n \cdot \text{ctg}(a \cdot \alpha_n) + ah - 1 = 0$$

Т. е.  $\alpha_n$  – корни последнего уравнения. Сравним численное решение с аналитическим. Аналитическое решение было получено с 6 значащими цифрами.

**Таблица**

**Параметры сетки**

**1**

Тип конечных элементов	Число узлов сетки при расчете		Число элементов	Относительный размер
	Линейным элементом	Квадратичным элементом		
Тетраэдр, 4 узла	1776	12078	7809	0.09

<sup>22</sup> Г. Карслоу, Д. Егер, Теплопроводность твердых тел. Изд. «Наука», Москва 1964 г. с. 234

**Таблица  
Параметры временной дискретизации**

Полное время расчета (с)	Шаг по времени (с)	Число временных слоев
60	1	60

Таблицы значений температур в точке от центра на расстоянии 50 мм в °С.

**Таблица №1 для расчета линейным элементом**

Время расчета $t$ , с	30	40	60
Аналитическое решение, °С	59.2381	58.4375	56.4123
Численное решение, °С	59.2223	58.4072	56.3901
Относительная погрешность, %	0.03	0.05	0.035

**Таблица №2 для расчета квадратичным элементом**

Время расчета $t$ , с	30	40	60
Аналитическое решение, °С	59.2381	58.4375	56.4123
Численное решение, °С	59.1617	58.3415	56.3222
Относительная погрешность, %	0.11	0.15	0.15

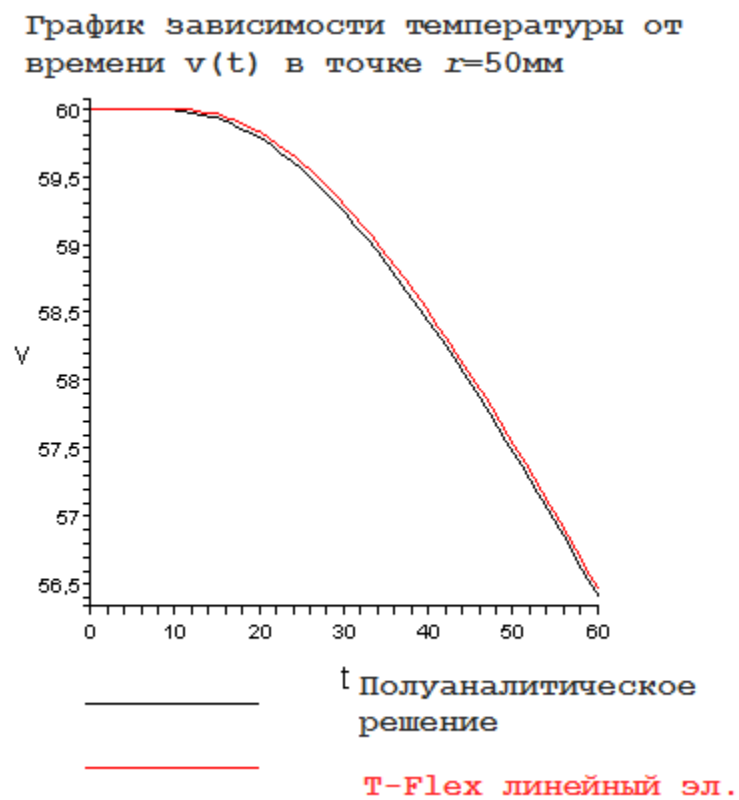


Рисунок 6.18-2 – График зависимости температуры  $V(t)$  от времени  $t$  в точке  $r=50\text{ мм}$ .

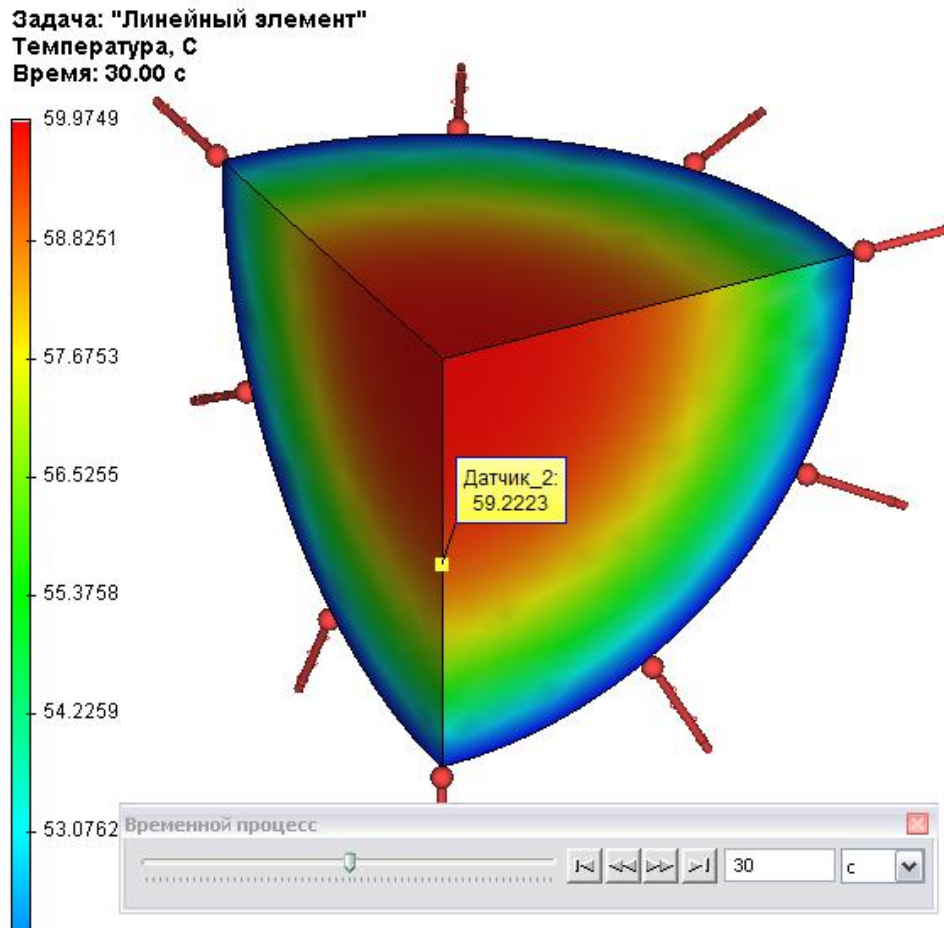


Рисунок 6.18-3 - Вид теплового поля через 30 с. (лин. элемент)

### Вывод:

Убедились в вычислительной эффективности метода. Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим составила меньше 0,5%, что дает гарантировано совпадение 2х значащих цифр при вычислительно небольших затратах по времени и памяти. Погрешность расчета по времени устойчива и существенно не растет с увеличением расчетного времени. На графике зависимости температуры от времени видно, что аналитическое решение и численное решение практически совпали.

Погрешность расчета квадратичными элементами существенно меньше, чем при расчете линейными элементами, однако темпы роста погрешности у квадратичных элементов по времени несколько выше.

### Нестационарное тепловое поле в изотропном цилиндре<sup>23</sup>

Рассмотрим задачу остывания цилиндрического тела с изотропными свойствами, имеющего начальную температуру в его объеме  $t_0=60$  °С. На границе тела поддерживается температура, равная нулю; время остывания не превышает 20 с. Определим температуру в контрольных точках 1, 2, 3, имеющих цилиндрические координаты (начало координат находится в центре цилиндра):  $r_1=25$  мм,  $h_1=25$  мм;  $r_2=25$  мм,  $h_2=-25$  мм;  $r_3=30$  мм,  $h_3=0$  мм; в моменты времени  $t_{1,2,3}=2; 10; 20$  сек.

Геометрические и физические характеристики тела: высота цилиндра  $H=100$  мм, радиус цилиндра  $a=50$  мм. Плотность  $\rho=7.7$  г/см<sup>3</sup>, теплоемкость  $c=460$  Дж/(кг\*°С), теплопроводность  $K=40$  Вт/(м \* °С).

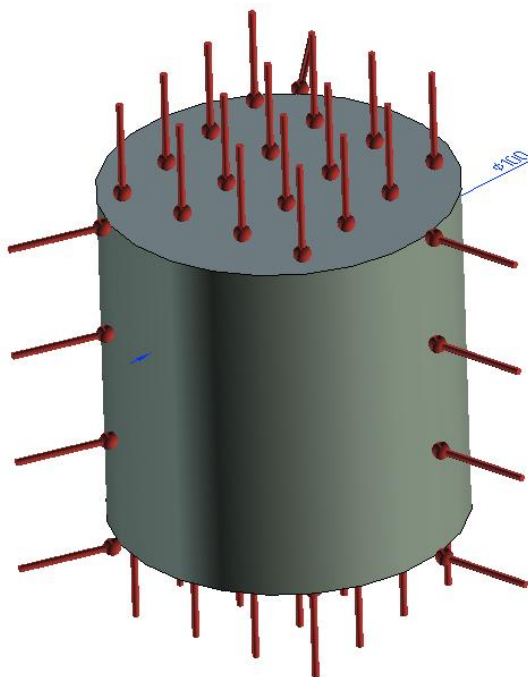


Рисунок 6.19-1 – Расчетная модель с граничными условиями

Искать решение будем в цилиндрической системе координат. Ее центр находится в центре цилиндра по высоте (изменение высоты -  $h$ ), а ось, от которой считается расстояние (радиус в цилиндрической системе -  $r$ ), совпадает с осью цилиндра. Обозначим  $l=H/2$ , тогда решаемое уравнение приобретает вид:

<sup>23</sup> Пример взят из книги Карслоу Г. Эггер Д. Теплопроводность твердых тел, Москва. изд. Наука. стр. 225

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \chi \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{K}{c \cdot \rho} = \chi$$

Граничные условия для этого уравнения имеют вид:

$$u(r, \varphi, z) = f(r, \varphi, z), t = 0$$

$$u(t) = 0, (r, \varphi, z) \in \{(r, \varphi, z) : r = a\} \cup \{(r, \varphi, z) : h = \pm l\}$$

В граничных условиях имеется ввиду, что  $f$  – некоторое распределение температуры внутри тела в начальный момент времени,  $u(t)=0$  на поверхности цилиндрического тела в течении всего периода времени. Заметим сразу, что в нашем случае  $f$  – это константа.

Приведем вид решения данного уравнения в виде разложения в ряд по гармоническим и по Бесселевым функциям для общего случая, когда  $f$  - не является постоянной.

$$u(r, \varphi, z, t) = \sum_{\mu} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\chi \left( \mu^2 + \frac{m^2 \pi^2}{4l^2} \right) t} J_n(\mu \cdot r) \cdot \sin \frac{m\pi(z+l)}{2l} \times$$

$$\times (A_{\mu, m, n} \cos(n\varphi) + B_{\mu, m, n} \sin(n\varphi))$$

Где  $J_n(r)$  – Бесселева функция<sup>24</sup>, параметр  $\mu$  является корнем уравнения

$$J_n(\mu a) = 0$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  вычисляются по формулам, приведенным ниже:

$$A_{\mu, m, n} = \frac{2}{\pi a^2 l \{J'_n(\mu a)\}^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi) \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi(z+l)}{2l} \int_0^a r J_n(\mu r) \cdot f(r, \varphi, z) dr dz d\varphi$$

$$B_{\mu, m, n} = \frac{2}{\pi a^2 l \{J'_n(\mu a)\}^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\varphi) \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi(z+l)}{2l} \int_0^a r J_n(\mu r) \cdot f(r, \varphi, z) dr dz d\varphi$$

В нашем простом случае, когда  $f = t_0$  из всего ряда по  $n$  останется только первое слагаемое  $n=0$ . Актуальным окажется только разложение по  $m$  и  $\mu$ . Упрощенный вид решения имеет вид:

$$u(r, \varphi, z, t) = \sum_{\mu} \sum_{m=1}^{\infty} A_{\mu, m} e^{-\chi \left( \mu^2 + \frac{m^2 \pi^2}{4l^2} \right) t} J_0(\mu \cdot r) \cdot \sin \frac{m\pi(z+l)}{2l}$$

Где

<sup>24</sup> Карслоу Г. Эггер Д. Теплопроводность твердых тел, Москва. изд. Наука стр. 478



$$A_{\mu,2m+1} = \frac{8 \cdot t_0}{\pi \mu a J_1(\mu a)(2m+1)},$$

$$A_{\mu,2m} = 0$$

Т. е. в ряде по  $m$  присутствуют только не четные коэффициенты.

Сравним значение температуры в фиксированной точке в различные моменты времени с решением, полученным методом конечных элементов. Точку будем выбирать на достаточном расстоянии от главной оси цилиндра, для лучшей сходимости ряда аналитики (в уравнении есть особенность вида  $1/r$  которая на скорость сходимости ряда по Бесселевым функциям существенно влияет).

Сравним решение T-Flex анализа с аналитическим решением. Для полуаналитического метода решения (выделение частичной суммы ряда) получено решение с точностью более 6-ти значащих цифр.

Таблица

1

Параметры пространственной сетки

Тип конечных элементов	Число узлов сетки при расчете	Число элементов сетки	Относительный размер
Тетраэдр, 4 узла. Линейный конечный элемент.	2473	11209	0.09
Тетраэдр, 6 узлов. Квадратичный конечный элемент.	16945	11209	0.09

Параметры временной дискретизации

Полное время расчета (с)	Шаг по времени (с)	Число временных слоев
20	0.5	40

Таблица

2

Таблица контрольных точек:

Номер точки	1	2	3
г, мм	25	25	30
h, мм	25	-25	0

И в моменты времени: 2, 10, 20 сек. будем смотреть значение температуры.

Температуры в контрольных точках в  $^{\circ}\text{C}$

**Таблица**  
**Расчет линейным элементом**  
**Для времени  $t=2$  с**

Номер контрольной точки	1	2	3
Аналитическое решение, °C	59.9710	59.9710	59.7728
Численное решение, °C	60.8509	60.8372	59.3652
Относительная погрешность, %	1.2	1.4	0.5

**Для времени  $t=10$  с**

Номер контрольной точки	1	2	3
Аналитическое решение, °C	46.7052	46.7052	45.5215
Численное решение, °C	44.7267	44.8331	43.8220
Относительная погрешность, %	4.2	4.05	3.5

**Для времени  $t=20$  с**

Номер контрольной точки	1	2	3
Аналитическое решение, °C	29.5316	29.5316	31.1765
Численное решение, °C	27.9843	28.2911	30.2286
Относительная погрешность, %	5.4	4.1	3.0

**Таблица**  
**Расчет квадратичным элементом**  
**Для времени  $t=2$  с**

Номер контрольной точки	1	2	3
Аналитическое решение, °C	59.9710	59.9710	59.7728
Численное решение, °C	59.8153	59.7620	59.8432
Относительная погрешность, %	0.20	0.35	0.03

**Для времени  $t=10$  с**

Номер контрольной точки	1	2	3
Аналитическое решение, °C	46.7052	46.7052	45.5215
Численное решение, °C	46.6186	46.6977	45.4049
Относительная погрешность, %	0.19	0.04	0.27

**Для времени  $t=20$  с**

Номер контрольной точки	1	2	3
Аналитическое решение, °C	29.5316	29.5316	31.1765
Численное решение, °C	29.4216	29.4864	31.0218
Относительная погрешность, %	0.37	0.17	0.5

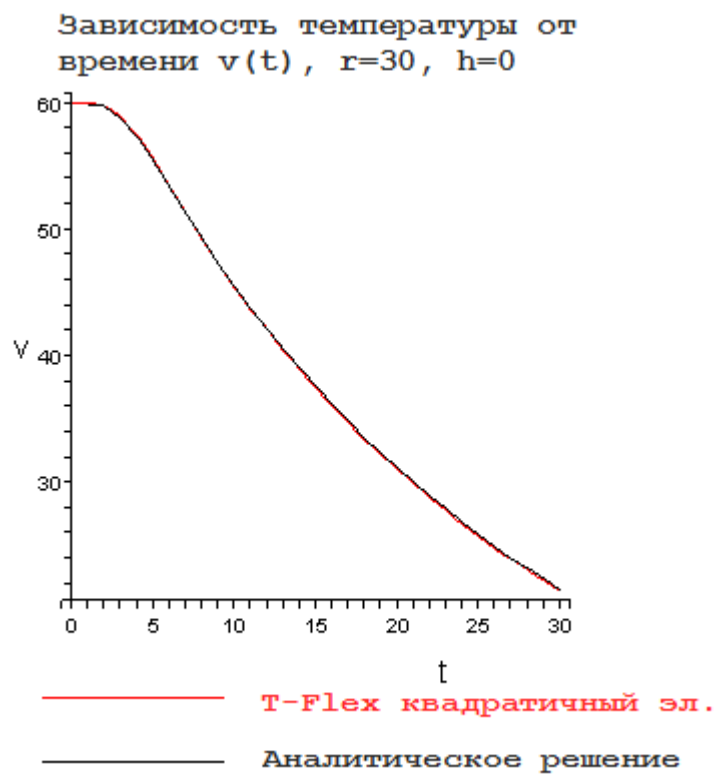


Рисунок 6.19-2 - Измерения температуры  $v$  в  $^{\circ}\text{C}$ , времени  $t$  в с,  $r$  и  $h$  – 3-я контрольная точка (в мм)

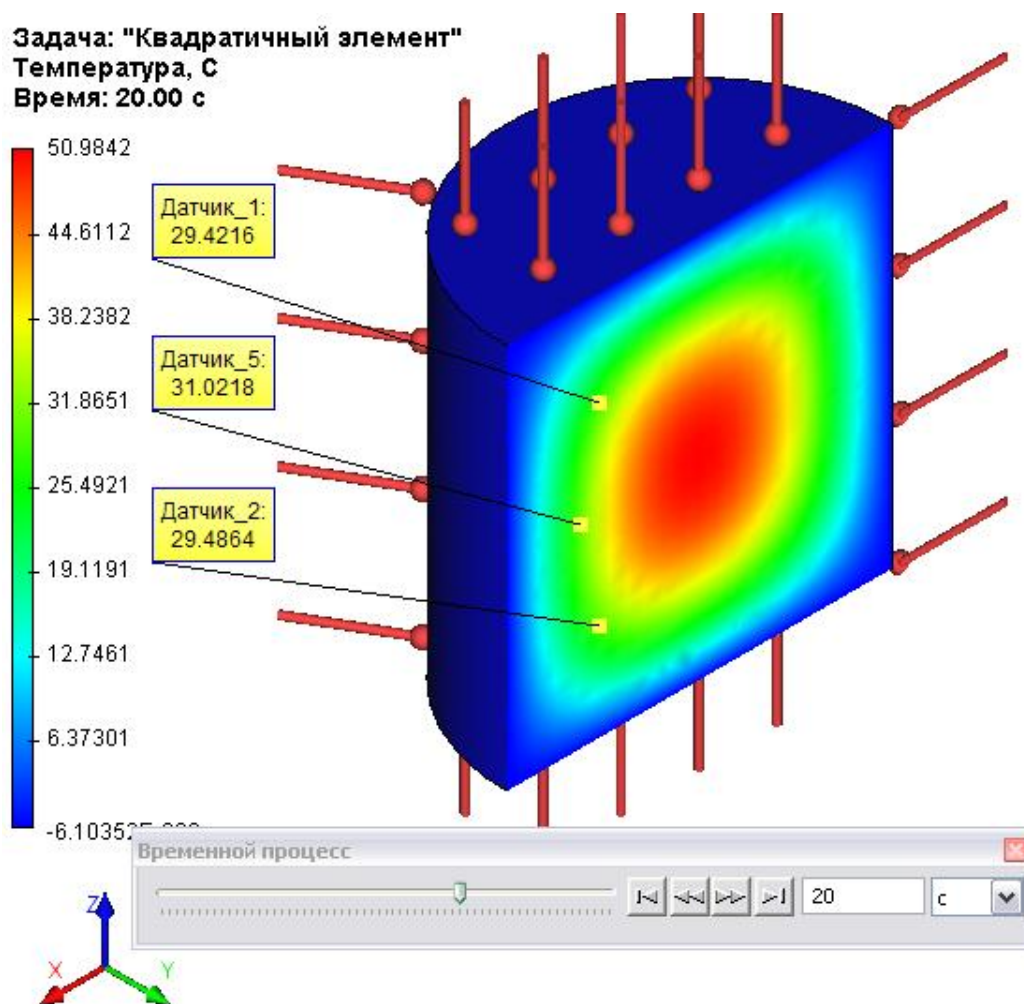


Рисунок 6.19-3 - Вид теплового поля через 20 секунд

**Вывод:**

Для данной задачи получили реалистичную картину поля. Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим не превышает 5% для линейного и 0,5% для квадратичного элементов (на временном интервале 20 с). Метод оказался эффективен для решения задач со сложной геометрией. Погрешность расчета по времени устойчива и существенно не растет с увеличением расчетного времени. На графике зависимости температуры от времени видно, что аналитическое решение и численное решение практически совпали.

Для сложной геометрии области квадратичные элементы показали себя лучше линейных. Однако следует помнить о том, что на больших интервалах времени квадратичные элементы накапливают большую погрешность, чем линейные на последних временных слоях.

Нестационарное тепловое поле в ортотропной пластине

Рассмотрим двумерную задачу остывания графитовой пластины с ортотропными свойствами. Начальная температура пластины  $t_0=60\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Температура на границе пластины поддерживается равной нулю. Пластина остывает в течении 20 с. Определим тепловое поле в моменты времени  $t_{1-4} = 2, 5, 10, 60\text{ с}$ . Расчет теплового поля проведем для контрольных точек 1-5 с координатами  $(X_i,Y_i)$ :

i	1	2	3	4	5
X, мм	20	20	80	80	50
Y, мм	20	80	20	80	50

Система координат материала выбрана так, что начало координат совпадает с углом пластины, а базовое направление выбрано вдоль оси OY.

Характеристики ортотропной пластины<sup>25</sup>: плотность  $\rho=2.5\text{ г/см}^3$ , теплоемкость  $c=840\text{ Дж/(кг}\cdot^{\circ}\text{C)}$ , коэффициенты теплопроводности:  $K_1=0.139\text{ Вт/(мм}\cdot^{\circ}\text{C)}$  (вдоль оси OX);  $K_2=0.278\text{ Вт/(мм}\cdot^{\circ}\text{C)}$  (вдоль оси OY - базового направления). Пластина имеет прямоугольную форму  $100\times 100\text{ мм}$ .

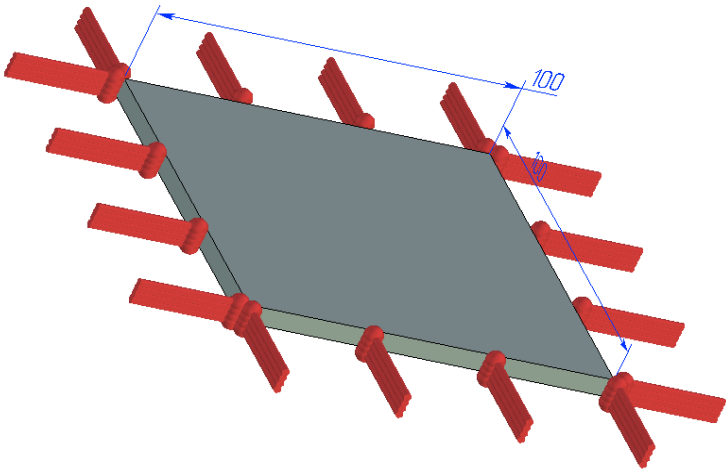


Рисунок 6.20-1 - Расчетная модель с граничными условиями

Дифференциальное уравнение имеет вид:

<sup>25</sup> <http://www.nanoscopy.org/tutorial/graphite/graphite.html>

$$K_1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c \cdot \rho \cdot \frac{du}{dt}$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), t = 0, (x, y) \in \Omega,$$

$$u(t, x, y) = 0, (x, y) \in \partial\Omega$$

Где  $\partial\Omega$  – граница расчетной области. Аналитическое решение задачи имеет вид<sup>26</sup>:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{m,n} \cdot e^{\lambda(m,n)t/(\rho \cdot c)} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot my}{l_y}\right) \sin\left(\frac{\pi \cdot nx}{l_x}\right)$$

Где

$$\lambda(m, n) = -\left(\frac{\pi \cdot m}{l_y}\right)^2 \cdot K_2 - \left(\frac{\pi \cdot n}{l_x}\right)^2 \cdot K_1$$

$$A_{m,n} = \frac{2}{l_x} \int_{x_0}^{x_1} \frac{2}{l_y} \int_{y_0}^{y_1} \varphi(x, y) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot nx}{l_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot my}{l_y}\right) dx dy$$

$$l_x = x_1 - x_0,$$

$$l_y = y_1 - y_0$$

В нашем случае  $x_1=100, y_1=100, x_0=y_0=0$ . Использовалось  $n=m=60$  членов ряда разложения.

Вид теплового поля через 2 секунды<sup>27</sup>:

<sup>26</sup> Решение получено методом разделения переменных. Описание этого метода содержится в книге Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. с 200.

<sup>27</sup> Аналитическое решение и график построены в системе Maple 9.5

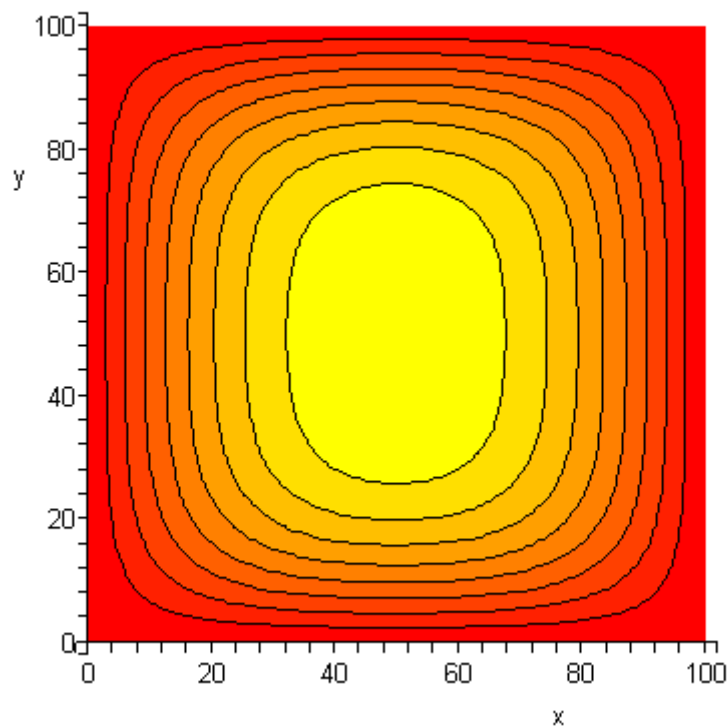


Рисунок 6.20-2 – Вид теплового поля в момент  $t_1=2$  с (аналитическое решение)

Как видно на рисунке, поле вытянуто вдоль оси OY. Такая же картина поля на поверхности пластины и в T-Flex.

Система координат на рисунке соответствует системе координат поверхности пластины.

Таблица

Параметры пространственной сетки

1

Тип конечных элементов	Число узлов сетки при расчете		Число элементов сетки	Относительный размер
	Линейным элементом	Квадратичным элементом		
Тетраэдр, 4 узла	2510	196132	132680	0.02

Таблица

Параметры временной дискретизации

2

Полное время расчета (с)	Шаг по времени (с)	Число временных слоев
--------------------------	--------------------	-----------------------

60	0.5	120
----	-----	-----

**Таблица**

**Таблица контрольных точек:**

3

Номер точки	1	2	3	4	5
X, мм	20	20	80	80	50
Y, мм	20	80	20	80	50

И в моменты времени: 2, 10, 20 сек. будем смотреть значение температуры.

Количество значащих цифр аналитического решения равно 6

Температуры в контрольных точках в  $^{\circ}\text{C}$

**Таблица**

**Расчет линейным элементом**

4

**Для времени  $t=2$  с**

Номер точки	1	2	3	4	5
Аналитическое решение, $^{\circ}\text{C}$	28.8050	28.8050	28.8050	28.8050	56.1856
Численное решение, $^{\circ}\text{C}$	28.4692	28.7457	28.5992	28.4386	56.018
Относительная погрешность, %	1.16577	0.20586	0.714459	1.27201	0.298297

**Для времени  $t=5$  с**

Номер точки	1	2	3	4	5
Аналитическое решение, $^{\circ}\text{C}$	13.1503	13.1503	13.1503	13.1503	35.5560
Численное решение, $^{\circ}\text{C}$	12.8375	12.7288	12.7474	12.8277	35.5369
Относительная погрешность, %	2.37	3.205	3.0638	2.4531	0.0537



	86 5	25	08	76	18
--	---------	----	----	----	----

Для времени  $t=10$  с

Номер точки	1	2	3	4	5
Аналитическое решение, °C	4. 74 82 0	4.7 48 20	4.7 482 4	4.7 482 4	13. 678 8
Численное решение, °C	4. 61 89 8	4.5 80 04	4.5 885 6	4.6 13	13. 337 2
Относительная погрешность, %	2. 72 14 5	3.5 41 55	3.3 629 3	2.8 482 13	2.4 972 95

**Таблица**  
**Расчет квадратичным элементом**

5

Для времени  $t=2$  с

Номер точки	1	2	3	4	5
Аналитическое решение, °C	28 .8 05 0	28. 80 50	28. 805 0	28. 805 0	56. 185 6
Численное решение, °C	29 .6 26 6	29. 62 42	29. 623 2	29. 623 7	55. 825 4
Относительная погрешность, %	2. 85 22 8	2.8 43 95	2.8 404 79	2.8 422 15	0.6 410 9

Для времени  $t=5$  с

Номер точки	1	2	3	4	5
Аналитическое решение, °C	13 .1 50 3	13. 15 03	13. 150 3	13. 150 3	35. 556 0

Численное решение, °C	13. .1 27 1	13. 12 7	13. 126 9	13. 127 4	35. 834 4
Относительная погрешность, %	0. 17 64 2	0.1 77 18	0.1 779 43	0.1 741 41	0.7 829 9

Для времени  $t=10$  с

Номер точки	1	2	3	4	5
Аналитическое решение, °C	4. 74 82 0	4.7 48 20	4.7 482 4	4.7 482 4	13. 678 8
Численное решение, °C	4. 74 93 5	4.7 49 38	4.7 493 5	4.7 495 4	13. 700 8
Относительная погрешность, %	0. 02 42 2	0.0 24 85	0.0 233 77	0.0 273 79	0.1 608 33

Для времени 60 с. результаты не приводятся, поскольку пластина практически остыла до 0 °C.

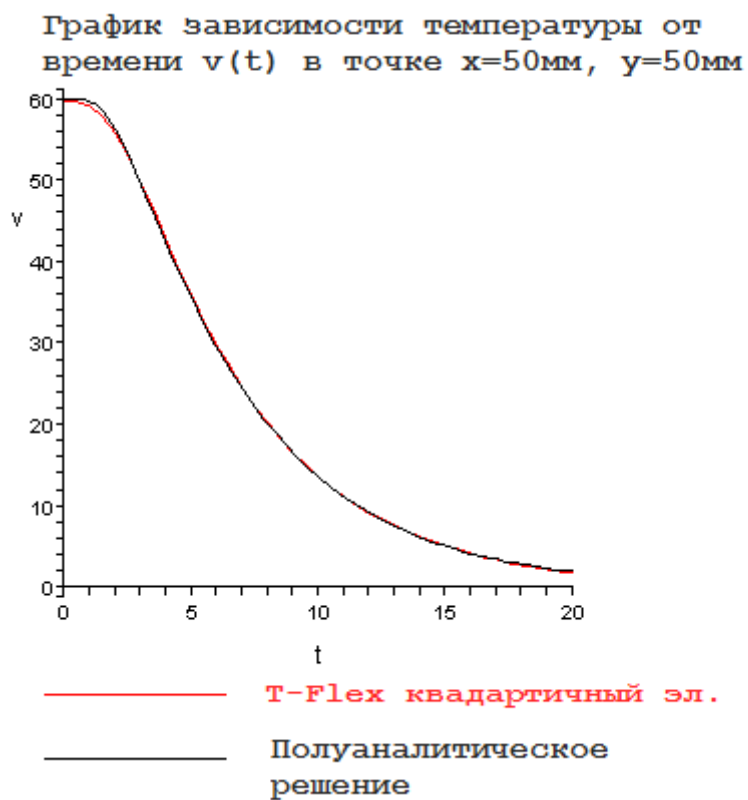


Рисунок 6.20-3 – Зависимость температуры  $V(t)$  от времени  $t$  в точке  $xu=(50,50)$  мм

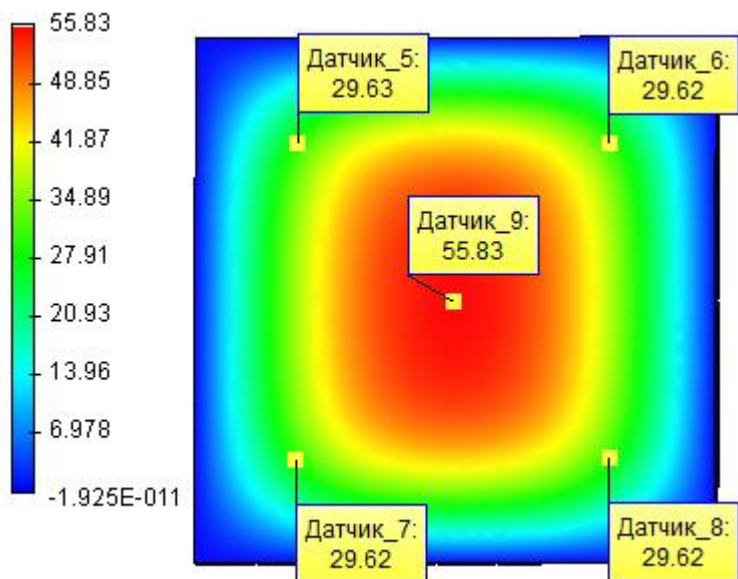


Рисунок 6.20-4 - Вид теплового поля в момент  $t_1=2$  с (по результатам конечно-элементного анализа)

#### Вывод:

Для данной задачи получили реалистичную картину поля. Относительная погрешность численного решения по сравнению с аналитическим не превышает 3,5% для линейного и 3% для квадратичного элементов (на временном интервале 10 с). Погрешность расчета по времени устойчива и существенно не растет с увеличением расчетного времени. На графике зависимости температуры от времени видно, что аналитическое решение и численное решение практически совпали.

Как уже показано в примере с тепловым потоком на поверхности сферы: при расчете на больших интервалах времени наиболее предпочтительно пользоваться линейными элементами, т. к. из-за малого числа узлов погрешность на временных слоях накапливается медленнее.

В нашем случае, проводимости вдоль главных осей пластины достаточно высоки, и значит, остывать она будет очень быстро. По этой причине квадратичные элементы на достаточно малых промежутках времени дают по точности лучший результат. Погрешность решения нестационарных задач не превышает 3.5 % для МКЭ для линейных элементов и 3 % для квадратичных элементов.

#### Литература

1. Биргер И. А., Пановко Я. Г. Прочность, устойчивость, колебания, том 1 – М.: Машиностроение, 1968. 831 с.
2. Биргер И. А., Пановко Я. Г. Прочность, устойчивость, колебания, том 3 – М.: Машиностроение, 1968. 567 с.
3. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.

4. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 392с.
5. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.Пластины и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
6. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. – 2-е изд. испр. – М.: Высш. шк., 2001. – 560 с.: ил.
7. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. – М., Физматгиз, 1962. – 456 с.
8. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
9. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1967. – 376 с.
10. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твёрдых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
11. Уонг Х. Основные формулы и данные по теплообмену для инженеров: Пер. с англ./ Справочник. – М.: Атомиздат, 1979. – 216 с.
12. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов, Киев, Вища Школа, 1979, 696 с.